

Publication de la commission géodésique néerlandaise

(Uitgegeven door de Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing.)

**OBSERVATIONS DE PENDULE
DANS LES PAYS-BAS**

1913—1921

PAR

F. A. VENING MEINESZ,

Docteur ès sciences techniques,

Ingénieur au service de la Commission Géodésique.

AVEC CINQ ANNEXES ET QUATRE PLANCHES.

AVANT-PROPOS.

En 1904 la Commission géodésique me confia la direction des observations de pendule qu'elle s'était proposé de faire exécuter. Jusqu'alors des déterminations de l'intensité de la pesanteur dans les Pays-Bas n'avaient été exécutées que par des savants étrangers à Leyde dans le bâtiment de l'observatoire: en 1870 par ALBRECHT avec un pendule réversible de REPSOLD, en 1892 par DEFFORGES avec son propre appareil, en 1898 par GORE aussi avec un pendule réversible de REPSOLD, et enfin en 1900 par HAID avec un appareil VON STERNECK.

La Commission avait l'intention de faire déterminer l'intensité relative de la pesanteur à un nombre suffisant de stations dispersées sur le territoire entier. Parmi celles-ci se trouveraient les stations du réseau principal de la triangulation, où des observations de latitude, et d'azimuth avaient été effectuées. La station principale, à laquelle toutes les déterminations relatives se rattacheraient, serait jointe à Potsdam afin de pouvoir calculer l'intensité absolue à chaque station.

Pour l'exécution de ces travaux la Commission disposait d'un appareil DEFFORGES, construit par BIANCHI à Paris, et d'une pendule de STRASSER und ROHDE à Glashütte (Saxe), battant les 0.7 secondes pour observer les coïncidences. En outre elle avait commandé chez STÜCKRATH à Friedenau un appareil VON STERNECK à quatre pendules de bronze et chez NARDIN à Le Locle (Suisse) un chronomètre à interrupteur électrique, qui furent reçus tous les deux en 1905. Le chronomètre fut contrôlé à l'Observatoire de Leyde; la marche se montra des plus régulières.

En 1906 M. l'ingénieur E. S. J. A. MODDERMAN qui avait travaillé depuis 1896 à la triangulation principale, où il s'était montré un observateur habile et consciencieux, fut chargé de l'exécution des observations de pendule. Les appareils furent installés dans une des localités de l'Établissement géodésique de l'École Technique Supérieure de Delft, désignée comme station principale.

L'année suivante M. MODDERMAN passa quelque temps à Potsdam sous la direction de M. le Professeur L. HAASEMANN, Chef de Section l'Institut géodésique et bien connu par ses nombreuses et belles observations de pendule. Après son retour à Delft il commença les préparatifs pour l'exécution des observations;

il détermina les constantes des appareils nécessaires pour la réduction des observations et composait des tableaux des différentes corrections afin d'en faciliter l'application. Tout fut prêt pour commencer les opérations aux stations quand une maladie inexorable le prit à laquelle il succomba le 22 Septembre 1908. Le souvenir de ce travailleur infatigable, aussi instruit que modeste, restera vivant dans la mémoire de tous ceux qui l'ont connu.

Après la mort prématurée de MODDERMAN les opérations restèrent suspendues jusqu'à Septembre 1910, quand M. F. A. VENING MEINESZ, qui venait de passer l'examen d'ingénieur civil à Delft, entra au service de la Commission. Il travailla d'abord à l'observatoire d'Utrecht pour s'exercer dans les déterminations d'heure et de latitude; l'année suivante il s'occupa des appareils DEFFORGES et VON STERNECK. En 1912 il passa quelque temps à l'Institut de Potsdam, où encore le Prof. HAASEMANN se chargea de son instruction. Plus tard celui-ci l'initia à la pratique des observations pendant une campagne dans la province de Holstein où M. VENING MEINESZ l'accompagna à deux stations.

L'exécution des opérations en Hollande fut encore retardée par des difficultés occasionnées par la forte mobilité du sol à Delft qui rendaient nécessaire le choix d'un lieu plus favorable comme station principale. Ce lieu fut trouvé à De Bilt, au centre du pays, dans le sous-sol du bâtiment de l'Institut Royal Météorologique. En Octobre 1912 tous les appareils y furent installés.

Les opérations aux stations furent entamées en 1913; pour déterminer la marche du chronomètre NARDIN on usa des signaux rythmés transmis téléphoniquement par l'Observatoire de Leyde.

Les observations aux premières stations ayant démontré que l'invariabilité du pendule DEFFORGES n'était pas garantie, il fut décidé que désormais on ferait seulement usage de l'appareil VON STERNECK dont l'emploi était d'ailleurs beaucoup plus facile. Pour parer à l'inconvénient que l'influence de la température sur les pendules de bronze était assez grande, la Commission commanda chez FECHNER à Potsdam quatre pendules en invar. On ne voulait cependant pas attendre l'achèvement de ceux-ci qui coûterait quelque temps.

En novembre 1913 M. VENING MEINESZ se rendit de nouveau à Potsdam en vue de la jonction de la station principale de De Bilt; en 1914 il continua les observations aux stations du pays.

Le 26 mars 1915 M. VENING MEINESZ passa avec distinction son doctorat ès sciences techniques à l'École Technique Supérieure de Delft en soutenant une thèse intitulée „Bijdragen tot de theorie der slingerwaarnemingen” — Contributions à la théorie des observations de pendule — dont une partie se trouve insérée dans l'exposé théorique de cette publication.

En juillet 1915 on reçut les pendules d'invar qui étaient tempérés et

contrôlés à l'Institut de Potsdam par les soins du Prof. HAASEMANN; depuis les pendules de bronze n'ont plus été employés.

L'état de santé de M. VENING MEINESZ ne lui permettait pas d'exécuter des observations aux stations en 1916 et 1917; il s'occupait seulement en 1917 de la détermination des constantes de la densité de l'air des pendules. En 1918 il reprit les observations aux stations et tâcha de déterminer les constantes de la température des pendules d'invar sans pourtant obtenir des résultats satisfaisants; l'irrégularité de la marche du chronomètre constituait une trop grande difficulté.

Depuis 1919 au lieu des signaux téléphoniques il faisait usage des signaux rythmés t. s. f. de la tour Eiffel pour déterminer la marche du chronomètre. Dans ce but un appareil de réception à cadre mobile était construit par la „Nederlandsche seintoestellenfabrick” à Hilversum. Comme la marche du chronomètre était devenue moins régulière, le programme des observations fut modifié afin de diminuer autant que possible l'influence des irrégularités. Au commencement de 1920 le chronomètre dut être envoyé à Le Locle pour être repassé par le constructeur. Après son retour les opérations aux stations furent continuées; au mois de décembre tout le programme fut achevé. Le nombre total des stations s'élève à 51.

En 1921 M. VENING MEINESZ détermina de nouveau, avec les pendules d'invar, la différence des valeurs de l'intensité de la pesanteur à de Bilt et à Potsdam. En dernier lieu il s'occupait des constantes de la température de ces pendules à l'Institut Géodésique de Potsdam, où l'appareil construit pour ces recherches par le Professeur HAASEMANN fut mis à sa disposition.

Toute l'année 1922 fut employée au calcul définitif des résultats; ce travail ne put être terminé qu'après la publication par le Bureau International de l'Heure à Paris des corrections sémi-définitives des signes horaires de la tour Eiffel.

Quoique le programme des observations de pendule en Hollande que la Commission Géodésique s'était proposé ait été achevé, les observations de pendule ne sont pas encore terminées. La Commission a déjà reçu l'adhésion des autorités compétentes pour faire exécuter des observations de pendule à Uccle et à Paris, pour la jonction de de Bilt à ces stations principales de Belgique et de France, et elle fera des démarches auprès des autorités anglaises pour obtenir encore la jonction avec Greenwich. De cette façon les observations hollandaises pourront contribuer à raffermir le rapport entre les déterminations de la pesanteur dans les pays environnants.

Je ne peux pas terminer sans avoir donné expression au nom de la Commission Géodésique, aux sentiments de gratitude qui l'animent envers tous ceux qui ont contribué à la réussite des opérations.

En premier lieu la Commission doit remercier M. le Professeur L. HAASEMANN à Potsdam, où il jouit maintenant d'un repos bien mérité après tant d'années vouées au culte de la science. Il a rendu d'incalculables services par l'instruction des ingénieurs et par sa collaboration à la détermination des constantes avec les moyens admirables dont dispose l'Institut géodésique; jamais un appel à sa bienveillance n'a été fait en vain.

Ensuite la Commission exprime ses sentiments de reconnaissance pour les services importants rendus par l'Observatoire de Leyde qui a donné pendant plusieurs années les signaux horaires.

Enfin la Commission tient à remercier M. le Professeur Dr. E. VAN EVERDINGEN, Directeur de l'Institut Royal Météorologique à de Bilt. Grâce à lui elle a trouvé une station principale satisfaisant à toutes les exigences raisonnables.

Quant aux mérites du Docteur VENING MEINESZ dans l'accomplissement de ses travaux je juge inutile de les faire ressortir. Mieux que ne le pourraient mes paroles les pages suivantes en rendront témoignage.

J. J. A. MULLER.

ZEIST, le 23 Juillet 1923.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Résumé	I
Chapitre I. Exposé théorique	6
§ 1. Considérations préliminaires	6
§ 2. Equation générale du mouvement perturbé	7
§ 3. Formules générales pour les perturbations de la durée d'oscillation et de l'amplitude	9
§ 4. Applications des formules pour un pendule	11
§ 5. Applications des formules pour deux pendules synchrones oscillant à la fois et soumis à un même moment perturbateur	12
§ 6. Formules pour les perturbations par les mouvements du support.	15
§ 7. Applicabilité des méthodes du § 5 pour l'élimination de l'effet des mouvements du support; examen de ces méthodes.	15
§ 8. Perturbations causées par les mouvements du sol	19
§ 9. Perturbations causées par l'entraînement du support par le mouvement des pendules	22
§ 10. Intégration des équations de deux pendules oscillant ensemble avec des amplitudes si petites que la réduction à l'amplitude zéro est négligeable	27
§ 11. Intégration des équations de deux pendules oscillant ensemble avec des amplitudes si grandes que la réduction à l'amplitude zéro n'est pas négligeable	34
§ 12. La réduction à l'amplitude zéro pour une longue durée d'observation	36
§ 13. La détermination du coefficient de l'entraînement.	40
§ 14. La déduction du résultat final T en de son erreur moyenne dans le cas où on a observé pendant plus d'une journée	50
Chapitre II. Description des appareils	59
Chapitre III. Détermination des constantes	64
§ 1. Constantes pour la réduction à pression zéro	64
§ 2. Constantes de la température	73
Chapitre IV. Tournées d'observation	75
§ 1. Choix des stations.	75
§ 2. Liste chronologique des tournées	76
§ 3. Détermination de l'altitude des stations	77
§ 4. Détermination de la marche du chronomètre	77

	Pages.
§ 5. Détermination du coefficient de l'entraînement	79
§ 6. Les observations de pendule; programme et formules	80
§ 7. Résultats des observations	86
Chapitre V. Les erreurs moyennes	96
§ 1. Analyse de l'erreur dans la détermination de la différence de g entre deux stations.	96
§ 2. Analyse des erreurs moyennes des déterminations de v^*) à une même station	100
§ 3. Détermination des mouvements du sol.	103
§ 4. Analyse de l'erreur moyenne des valeurs moyennes de v aux différentes stations d'une même tournée	105
§ 5. Analyse des erreurs moyennes des déterminations de w^{**}) à une même station	109
§ 6. Analyse de l'erreur moyenne des valeurs moyennes de w aux différentes stations d'une même tournée	114
§ 7. Analyse des observations en 1919, 1920 et 1921	118
§ 8. Recherche sur les erreurs moyennes par l'examen des résultats finaux pour les différentes journées à une même station.	121
§ 9. Comparaison des différentes valeurs du résultat final T à de Bilt, afin de contrôler la variabilité des pendules	133
§ 10. Détermination de l'erreur moyenne des résultats finaux pour les différences dg entre la pesanteur à de Bilt et aux différentes stations	135
§ 11. Détermination de l'erreur moyenne totale de g aux différentes stations	138
Chapitre VI. Déduction de la pesanteur et des anomalies	140
§ 1. Détermination de dg	140
§ 2. Détermination de g	141
§ 3. Réduction de g au niveau de la mer	141
§ 4. Détermination des anomalies	143
§ 5. Quelques remarques sur l'interprétation géologique des anomalies	144
Annexes	
1. Stations pendulaires.	
2. Détermination de g et des anomalies.	
3. Carte représentant les anomalies.	
4. Esquisse géologique.	
5. Carte représentant les mouvements du sol.	

*) v est la différence des durées d'oscillation de deux pendules oscillant ensemble.

**) w est la différence des T_p des deux paires de pendules, observées consécutivement.

Résumé.

Le résumé succinct qui fait l'objet des lignes suivantes, permettra le lecteur de s'orienter préalablement sur les sujets traités dans les divers chapitres de cette publication.

Le premier chapitre contient une exposition théorique des méthodes d'observation et des formules employées. La mobilité du sol dans une partie des Pays-Bas sur laquelle le § 1 fournit quelques renseignements, a donné lieu à chercher des méthodes spéciales par lesquelles l'effet de ces mouvements sur le résultat des observations de pendule pourrait être éliminé.

Les §§ 2 et 3 contiennent la déduction des formules générales pour la perturbation de la durée d'oscillation et de l'amplitude causé par un moment perturbateur arbitraire. Ces formules permettent de tirer différentes conclusions communiquées dans les §§ 4 et 5, dont celles du § 5 ont une portée directe sur le problème, puisqu'elles démontrent que si deux pendules synchrones, oscillant à la fois, sont soumis à un même moment perturbateur, les perturbations des durées d'oscillation se laissent éliminer. Les §§ 6 et 7 montrent que ce cas se présente si les perturbations sont causées par des mouvements du support à condition que les deux pendules oscillent sur le même support dans un même plan. L'influence des mouvements du support, composés d'une part de l'entraînement du support par le mouvement des pendules et d'autre part par les mouvements du sol, se laisse donc éliminer en appliquant une des méthodes du § 5.

La méthode la plus simple est de faire osciller les deux pendules à amplitudes égales et à phases contraires; la moyenne des deux durées d'oscillation est alors indépendante de tout mouvement du support. Si les durées d'oscillation des deux pendules ne sont pas rigoureusement égales la durée de l'observation a une limite au dessus de laquelle la méthode devient impraticable, puisque la différence des phases et le rapport des amplitudes changent lentement. Pour les pendules employés, la différence des durées d'oscillation étant d'environ $30 \cdot 10^{-7}$ secondes, la limite est de deux heures.

Quand on désire faire des observations de plus longue durée sans observations intermédiaires, on peut en profiter qu'il y a pour chaque paire de pendules, comme il l'est démontré dans les §§ 10 et 11, deux rapports d'amplitudes, chacun combiné avec une certaine différence de phase, qui, à des fluctuations très restreintes près, se maintiennent indéfiniment. En réalisant un de ces deux cas on peut employer les formules du § 5 no. III qui permettent

l'élimination des mouvements du support pour un rapport d'amplitudes et une différence de phases arbitraires à condition qu'on connaisse la différence des durées d'oscillation non-perturbées. On a fait ainsi des observations à deux pendules durant neuf heures.

Dans le § 8 sont déduites les formules pour les valeurs moyennes des perturbations causées par des mouvements irréguliers du sol, et dans le § 9 les formules pour les perturbations causées par l'entraînement du support par le mouvement des pendules. Les formules du § 9 pour l'influence mutuelle de deux pendules (22 et 23) ne sont applicables que pour une durée pendant laquelle le rapport des amplitudes et la différence des phases ne changent que peu.

Des formules pour une plus longue durée sont déduites par intégration dans le § 10; ces formules ne sont valables que si la différence des durées d'oscillation non perturbées est indépendante des amplitudes, ce qui n'est vrai que si la réduction à l'amplitude zéro est négligeable. Les formules sont interprétées géométriquement pour le cas général où les constantes de l'appareil ont des valeurs arbitraires et pour quelques cas spéciaux e. a. celui de l'appareil VON STERNECK.

Dans le § 11 est étudiée la modification que le phénomène subit si la réduction à l'amplitude zéro n'est pas négligeable, mais les équations n'étant pas généralement intégrables, on se borne au cas qui a un intérêt spécial pour les observations: le cas, où le rapport des amplitudes et la différence des phases restent à peu près constantes.

Le § 12 contient la déduction d'une formule dont on a besoin quand on fait des observations de longue durée sans observations intermédiaires de l'amplitude, à savoir une formule exprimant la réduction à l'amplitude zéro par les valeurs initiales et finales de l'amplitude. En outre on y détermine, à l'aide des formules du § 8, l'erreur moyenne de cette expression, provenant des fluctuations irrégulières de l'amplitude occasionnées par les mouvements du sol.

Dans le § 13 sont considérées différentes méthodes pour la détermination du coefficient de l'entraînement. Quant aux observations dans les Pays-Bas, on pouvait se contenter d'une valeur approximative à cause de l'emploi des méthodes du § 5; il était donc indiqué de choisir la méthode la plus simple pour l'appareil VON STERNECK, à savoir la méthode ordinaire à deux pendules.

Le § 14 traite d'un problème concernant le calcul des résultats par la méthode des moindres carrés. A la plupart des stations on a observé pendant plusieurs jours consécutifs et afin de se procurer des données pour le calcul de l'erreur moyenne, on a fait aussi des déterminations de l'heure à des moments intermédiaires. Le calcul du résultat et de l'erreur moyenne présente des complications, puisqu'on ne sait pas d'avance le rapport du poids des observations de pendule à celui des déterminations de l'heure. Le § 14 donne une solution

générale qui met en évidence les différents côtés du problème, p. e. l'accroissement du poids du résultat par l'augmentation du nombre de journées d'observation et la dépendance de cet accroissement du rapport mentionné.

Le chapitre II présente une description des appareils. La commission disposait de :

- 1^o. Un appareil VON STERNECK muni de quatre pendules en bronze, qui ont été remplacés en 1915 par quatre pendules en invar. Le chronomètre donnant les coïncidences fut comparé jusqu' à 1919 avec l'Observatoire de Leiden au moyen de signaux téléphoniques et depuis 1919 avec l'Observatoire de Paris au moyen des signaux radiotélégraphiques rythmés.
- 2^o. Un appareil DEFFORGES à pendule réversible muni d'une pendule astronomique correspondante. Les résultats des observations avec cet appareil pendant les premières tournées donnant lieu à des soupçons, on l'a soumis à un examen, dont on trouve les résultats dans ce chapitre. Ils démontrent que l'invariabilité du pendule n'est pas garantie. On a renoncé par conséquent à l'emploi de cet appareil.

Le chapitre III traite de la détermination des constantes de la densité de l'air et de la température.

Ayant fait les observations pendant quelques tournées dans le vide, la réduction à pression zéro a dû être déterminée au moyen de la formule binôme :

$$\delta\tau = c_1 D + c_2 \sqrt{p}$$

où D est la densité et p la pression, puisque pour les petites pressions la déviation de la proportionalité à D est assez considérable. D'ailleurs pour la réduction des observations à pression atmosphérique cette formule est préférable aussi.

La détermination des deux constantes c_1 et c_2 se trouve dans le § 1.

Le § 2 contient la détermination des constantes de la température qui à été exécutée à Potsdam.

Le chapitre IV donne des particularités sur les tournées et les résultats obtenus. Le § 1 traite du choix des stations, dont on trouve une liste alphabétique contenant les différentes données dans l'annexe n^o I, le § 2 donne un tableau chronologique des tournées, le § 3 contient des renseignements sur la détermination de l'altitude des stations, le § 4 sur la détermination de la marche du chronomètre, le § 5 sur la détermination du coefficient de l'entraînement, le § 6 enfin contient des particularités sur les observations même e. a. le programme des observations et les formules employées pour le calcul.

Le § 7 donne les résultats des observations :

Le premier tableau contient pour chaque journée d'observation : la moyenne des durées d'oscillation corrigées des quatre pendules, la marche du chronomètre, la température moyenne, et la densité moyenne de l'air. La dernière

colonne contient les résultats finaux T pour les différentes stations, déduites à l'aide des formules du § 14 du premier chapitre, en employant les données du chapitre suivant quant au rapport mentionné plus haut du poids des observations de pendule et de celui des déterminations de l'heure.

Le second tableau donne les différences des durées d'oscillation des quatre pendules. Nous désignons par v la différence des durées de deux pendules ayant oscillé ensemble et par w la différence des moyennes des deux paires de pendules ayant oscillé l'un après l'autre. v est donc indépendant de la marche du chronomètre mais sujet aux perturbations par les mouvements du sol, w est indépendant de ces derniers mais sujet aux fluctuations de la marche.

La première colonne du second tableau contient la valeur moyenne de v pour chaque station du premier paire de pendules, la seconde colonne donne le nombre d'observations dont cette moyenne est déduite, et la troisième l'erreur moyenne d'une observation de v . Les trois colonnes suivantes renferment les mêmes quantités pour le second paire de pendules. Les trois dernières colonnes donnent de la même manière les valeurs moyennes de w , le nombre d'observations de w à chaque station et l'erreur moyenne d'une observation de w .

Tous les calculs ont été exécutés en 8 décimales de la seconde. On a cru pouvoir se dispenser d'une publication intégrale.

Le chapitre V contient la déduction des erreurs moyennes.

Afin de pouvoir appliquer les formules du § 14, chap. I, il faut connaître, soit le rapport de l'erreur moyenne de la détermination de l'heure à celle des observations de pendules corrigées, soit une de ces deux erreurs moyennes. Il est difficile d'obtenir ce rapport et l'erreur moyenne de la détermination de l'heure, mais l'erreur moyenne des observations de pendule se déduit facilement des erreurs moyennes de v (§ 2). En outre on a déduit :

la valeur moyenne des mouvements du sol pendant les observations aux stations sur terrain meuble (§ 3, carte de l'annexe n^o 5),

la variabilité moyenne des pendules pendant les tournées (§ 4 et § 6),

les fluctuations de la marche du chronomètre et l'erreur qui en résulte si on n'a pas observé durant l'intervalle entière entre deux déterminations de l'heure (§ 5). Cette erreur est déterminée d'une manière plus directe dans le § 7.

Le § 8 contient la déduction par l'application des formules du Chap. I § 14 de l'erreur moyenne des déterminations de l'heure et du résultat final T à chaque station. Pour deux stations, Potsdam et Leiden, où le programme des observations a été différent, l'erreur moyenne est déduite séparément.

Le § 9 examine les différentes valeurs de T trouvées consécutivement à la station centrale De Bilt, ce qui permet de constater que la variabilité des pendules est restée entre les limites attendues en vertu des valeurs déduites dans le § 4.

Le § 10 contient le calcul des erreurs moyennes des différences dg de la pesanteur à chaque station particulière et à la station centrale de De Bilt, en ajoutant aux erreurs moyennes de T aux deux stations l'effet de la variabilité des pendules. On peut les désigner comme les erreurs moyennes du résultat g dans le système de De Bilt.

On obtient l'erreur moyenne de g dans le système de Potsdam en y ajoutant l'erreur moyenne de la détermination de la différence De Bilt—Potsdam, et en dernier lieu l'erreur moyenne totale de g en l'augmentant encore de l'erreur moyenne de la détermination absolue de g à Potsdam. (§ 11).

Le chapitre VI contient le calcul de g et des anomalies.

Le § 1 traite du calcul de la différence dg de la pesanteur à De Bilt et aux diverses stations, le § 2 du calcul de g et le § 3 de la réduction de g au niveau de la mer. Pour faciliter la comparaison avec les résultats des autres pays de l'Europe on l'a fait de la manière ordinaire en appliquant :

- 1^o. la réduction dans l'air libre.
- 2^o. la réduction de BOUGUER.
- 3^o. la réduction topographique, négligeable d'ailleurs à presque toutes les stations.

On a renoncé d'appliquer la méthode de réduction isostatique donnée par Mrs. HAYFORD et BOWIE, quoiqu'on en reconnaît la valeur, puisque ce travail ne serait justifié, que si elle fût appliquée de même aux observations des pays limitrophes. D'ailleurs la différence des résultats des deux méthodes sera à peu près constante dans les Pays-Bas à cause des faibles différences d'altitude.

Le § 4 traite du calcul des anomalies de g ; les valeurs normales ont été déterminées au moyen de la nouvelle formule de HELMERT de 1915.

Les résultats des calculs des §§ 1, 2, 3 et 4 sont donnés dans le tableau de l'annexe n^o 2. Les anomalies trouvées ont été indiquées dans la carte de l'annexe n^o 3, qui contient aussi les résultats provisoires des déterminations des déviations de la verticale. On peut constater que la direction et la grandeur de ces déviations s'accordent en général très bien avec la distribution des anomalies.

En dernier lieu le § 5 présente quelques remarques sur l'interprétation des anomalies; à cette fin on a ajouté dans l'annexe n^o 4 une carte contenant des données sur l'état géologique du pays.



CHAPITRE I.

Exposé Théorique.

§ 1. Considérations préliminaires.

Dans une grande partie des Pays-Bas les couches supérieures du sol sont marécageuses et meubles, souvent même jusqu'à une profondeur de plus de dix mètres. Ces couches sont perpétuellement en mouvement de sorte qu'il est impossible d'y obtenir un point d'appui absolument fixe pour les appareils de pendule.

Ces mouvements du sol peuvent être occasionnés par des causes locales, comme le passage d'une voiture sur la route, ou d'un bateau dans un canal, mais il n'est pas douteux qu'il y a aussi des causes plus générales. Nous verrons plus tard (chap. V, § 3) que les perturbations dans les observations de pendule augmentent en s'approchant de la mer du Nord, et que près de la côte, dans les dunes, elles atteignent même des valeurs considérables, quoique le terrain là soit si ferme que les causes locales ne peuvent avoir d'effet. On a constaté en outre qu'elles sont plus grandes quand le vent est fort. Il est donc très vraisemblable qu'il faut les attribuer principalement à l'influence de la mer du Nord.

Cette hypothèse est appuyée par les résultats donnés par les appareils sismologiques à de Bilt: les courbes montrent aux jours de tempête de fortes microséismes d'une période variant entre 2 et 8 secondes, qu'on attribue à l'action de la mer du Nord ou de l'Atlantique.¹⁾

Au sud-ouest, en Zélande, les valeurs trouvées des perturbations sont plus petites qu'ailleurs dans la proximité de la mer du Nord. Le nombre d'observations est trop petit pour pouvoir décider si c'est une déviation réelle, ou s'il faut l'attribuer au hasard. Il faut remarquer d'ailleurs que les couches tertiaires sont là plus près de la surface de sorte qu'une différence s'expliquerait.

Le Zuiderzee paraît avoir beaucoup moins d'influence, probablement parce que les masses d'eau ébranlées sont moins grandes.

Dans les parties orientales et méridionales des Pays-Bas, où les couches supérieures, consistant principalement en sable, sont plus fermes, on ne constate pas de perturbation perceptible, soit que le sol soit immobile, soit que les mouvements aient le caractère de vibrations périodiques d'une période différant beaucoup de celle des pendules.

1) Publ. ann. n^o. 108 du Kon. Ned. Met. Inst.: Seismische Registrirungen in de Bilt.

Une manière simple de déterminer s'il faut s'attendre à des perturbations par les mouvements du sol, est de mettre un pendule en repos et d'observer s'il se remet en mouvement. On peut employer l'amplitude moyenne qu'il atteint après un temps donné comme une mesure des perturbations moyennes. On en peut obtenir une aussi par la considération des perturbations de la durée d'oscillation pendant les observations.

Les valeurs constatées ainsi aux différentes stations (voir le Chap. V § 3) sont indiquées dans la carte de l'annexe n°. 5.

Puisqu'il était impossible d'éviter les terrains meubles, il était nécessaire d'étudier de plus près les perturbations causées par les mouvements du sol et de tâcher de trouver une méthode pour les éliminer.

C'est l'objet de l'étude suivante.

§ 2. Équation générale du mouvement perturbé du pendule.

Supposons que le pendule et le support sont symétriques par rapport à un plan vertical, qui contient donc la courbe décrite par le centre de gravité du pendule Z .

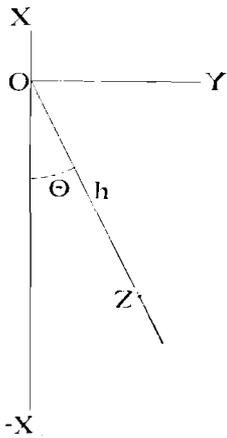


Fig. 1.

Mettons l'origine des coordonnées dans le point de suspension du pendule, l'axe des X dans la verticale et l'axe des Y dans l'horizontale.

Désignons par h : la distance OZ .

θ : l'angle d'élongation de OZ .

m : la masse du pendule.

I : le moment d'inertie du pendule par rapport à O .

g : l'accélération de la pesanteur.

$l = \frac{I}{mh}$: la longueur du pendule mathématique.

n : la quantité $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

L'équation des moments autour de O donne l'équation connue :

$$mg h \theta + m I \theta'' + M_s = 0 \dots \dots (1 A)$$

où M_s est la somme de plusieurs petits moments.

En divisant par $m h l$ on a :

$$\frac{g}{l} \theta + \theta'' + S = 0, \quad \text{où} \quad S = \frac{M_s}{m h l} \dots \dots (1 B)$$

Le moment M_s est occasionné par les causes suivantes :

1. La substitution de θ pour $\sin \theta$ en posant l'équation (1 A).
2. La déformation du pendule pendant l'oscillation.
3. L'action de l'air environnant.

4. L'influence de la forme du couteau, du glissement du couteau sur le plan de suspension et de la déformation des parties qui sont en contact.

5. Les translations du système des coordonnées par suite des mouvements de l'origine O , qui sont composés de deux parties :

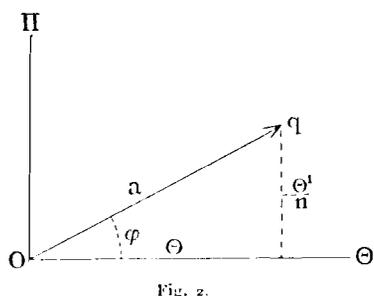
- a. les mouvements du support causés par les mouvements du sol,
- b. l'entraînement du support par l'effort du pendule.

M_s et S sont donc de petites quantités. Si S est nul l'équation (1 B) devient l'équation connue du pendule théorique. On peut donc considérer S comme la somme des termes perturbateurs, dont il faut déterminer l'influence.

Pour trouver la solution de (1 B) nous introduisons une nouvelle variable au lieu de θ :

$$q = \theta - \frac{i}{n} \theta' \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots \dots (2 A)$$

q est donc une quantité complexe, qu'on peut représenter géométriquement par un vecteur dans un plan $\theta\pi$, ayant les composantes rectangulaires θ et $-\frac{\theta'}{n}$.



On reconnaît aisément que q est un vecteur tournant autour de O ; l'angle d'élongation du pendule est la projection de q sur l'axe θ . Nous nommons le module de q l'amplitude a et l'argument de q l'angle de phase φ , qui dépend donc de q par l'équation :

$$q = a e^{i\varphi}.$$

La substitution de (2 A) dans l'équation (1 B) produit l'équation pour q :

$$q' - inq - i \frac{S}{n} = 0 \quad \dots \dots (2 B)$$

C'est une équation différentielle de premier ordre, dont la solution est :

$$q = (q_0 + \delta q') e^{int} \quad \dots \dots (3 A)$$

où

$$\delta q' = \frac{i}{n} \int_0^t S e^{-int} dt \quad \dots \dots (3 B)$$

q_0 est la valeur de q pour $t = 0$ et $\delta q'$ est la perturbation de q par les termes perturbateurs S .

Si S est connu comme fonction de t , on peut déduire $\delta q'$ et q et le problème est résolu.

La formule (3 B) est linéaire en S ; on peut donc étudier l'effet des différents termes de S séparément.

Si S est nul, on a :

$$q = q_0 e^{int}.$$

Dans ce cas q a une vitesse angulaire n , et un module constant, c'est à dire que l'amplitude est constante.

§ 3. Formules générales pour les perturbations de la durée d'oscillation et de l'amplitude.

On peut définir la durée d'oscillation T comme la moitié du temps dans lequel l'angle de phase ψ accroît de 2π .

Pour la durée d'oscillation τ du pendule théorique ($S = 0$) on trouve donc la formule connue :

$$\tau = \frac{\pi}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pour déduire la formule pour T dans le cas général, nous divisons (3 A) par e^{int} . Le vecteur

$$\frac{q}{e^{int}}$$

a un module a (l'amplitude) et un argument $(\psi - nt)$. Si on fait t égal à un nombre entier de périodes $2T$ on a, en indiquant l'angle de phase pour $t = 0$ par q_0 .

$$\psi = q_0 + \frac{t}{2T} \times 2\pi$$

et puisque $\pi = n\tau$, on a :

$$(\psi - nt) = q_0 + \frac{t}{T} n (\tau - T) = q_0 - \frac{t}{T} n \delta\tau,$$

où $\delta\tau$ signifie la perturbation cherchée dans la durée d'oscillation.

L'interprétation géométrique de la formule (3 A) divisée par e^{int} est donc donnée par la figure (3).

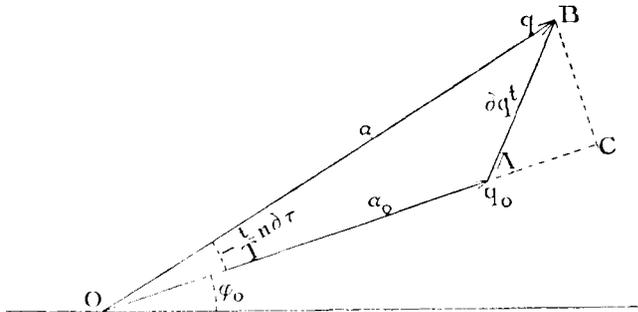


Fig. 3.

On en déduit les formules :

$$a \sin \frac{t}{T} n \delta\tau = \text{la composante de } \delta q_t \text{ perpendiculaire à } q_0 \quad (4 Aa)$$

$$= - \frac{1}{n} \int_0^t S \cos (nt + \psi_0) dt \dots \dots \dots (4 Ab)$$

$$a \cos \frac{t}{T} n \delta \tau - a_0 = \text{la composante de } \delta q_t \text{ parallèle à } q_0. \quad (4 Ba)$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^t S \sin (nt + q_0) dt, \quad (4 Bb)$$

ou d'autres formules géométriques permettant de déduire OB et $\angle BOA$ des quantités connues OA , AB et $\angle OAB$.

Si l'angle $\frac{t}{T} n \delta \tau$ est petit, c'est à dire si BC est petit par rapport à a on peut simplifier en mettant:

$$\cos \frac{t}{T} n \delta \tau = 1; \quad \sin \frac{t}{T} n \delta \tau = \frac{t}{T} n \delta \tau.$$

En substituant en même temps:

$$t = 2 T$$

et en désignant le changement de a pendant ce temps par δa^{2T} , on obtient les formules:

$$\delta \tau = \frac{1}{2 n a} \times \text{la composante de } \delta q^{2T} \text{ perpendiculaire à } q_0. \quad (5 Aa)$$

$$= - \frac{1}{2 n^2 a} \int_0^{2T} S \cos (nt + q_0) dt \quad (5 Ab)$$

$$= - \frac{1}{2 n^3 a} \int_0^{2\pi} S \cos q dq \quad (5 Ac)$$

$$\delta a^{2T} = \text{la composante de } \delta q^{2T} \text{ parallèle à } q_0. \quad (5 Ba)$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{2T} S \sin (nt + q_0) dt \quad (5 Bb)$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} S \sin q dq \quad (5 Bc)$$

Si on connaît S en fonction de t on peut se servir des formules (5 Ab) et (5 Bb), si on le connaît en fonction de q des formules (5 Ac) et (5 Bc).

Quand l'amplitude a_0 est très petite, $\delta \tau$ peut devenir grand, même quand S et δq sont petits. (voir fig. 3). Il faut donc recourir alors aux formules (4) ou à quelqu'autre formule déduite de la figure (3).

Quand a_0 est zéro, la formule pour l'amplitude redevient très simple: a est égal au module de $\delta q'$ et on peut donc en déduire la valeur à l'aide de la formule (3 B). Dans ce cas le calcul de $\delta \tau$ n'a pas de sens, puisque $\delta \tau$ est indéfini.

Les observations de pendule donnent la durée d'oscillation avec une précision de $1 \cdot 10^{-7}$ seconde, il faut donc que les erreurs de réduction soient plus petites que $0,5 \cdot 10^{-7}$ seconde. Afin que l'erreur causée par l'emploi des

formules (5) ne dépasse pas cette limite, il faut que $\delta\tau$ soit plus petit que 0,001 sec. Si l'amplitude est normale, c'est à dire aux moins 10', cette condition est satisfaite; les perturbations n'atteignent dans la pratique même pas 0,0002 sec. et on peut donc toujours employer les formules (5).

Il va sans dire que l'étude des différentes perturbations énumérées page 2 et la déduction des formules pour les réductions correspondantes est facilitée par les formules trouvées.

Nous nous restreindrons ici à examiner l'influence des mouvements du support en renvoyant pour l'étude des autres perturbations aux ouvrages suivants:

F. R. HELMERT, „Beiträge zur Theorie des Reversionspendels”.

DEFFORGES, „Observations de pendule”, Tome XV, Mém. du Dépôt de la Guerre.

KÜHNEN und FURTWÄNGLER, „Bestimmung der absoluten Grösze der Schwerkraft in Potsdam”.

F. A. VENING MEINESZ, „Bijdrage tot de theorie der slingerwaarnemingen”.

Dans le dernier sont appliquées les formules de ce paragraphe.

§ 4. Applications des formules pour un pendule.

Avant d'examiner plus spécialement les perturbations par les mouvements du support, nous tirerons quelques conclusions générales:

I. La perturbation de la durée d'oscillation est nulle, si le moment perturbateur a la même valeur pour une même élongation θ de l'un ou de l'autre côté de la verticale.

Le théorème se déduit immédiatement de (5 A*c*), puisque pour les deux valeurs de θ , les $\cos \varphi$ sont égaux avec signe inverse, de sorte que l'intégrale devient nulle.

II. Des moments perturbateurs dépendant seulement de θ' ne causent pas de perturbation de la durée d'oscillation.

Le théorème s'ensuit du précédent.

III. La perturbation de l'amplitude est nulle, si la valeur de S pour l'élongation θ est la même, indépendamment de la direction du mouvement du pendule. Dans ce cas les $\sin \varphi$ sont égaux avec signe inverse, donc l'intégrale (5 B*c*) est zéro.

IV. Des moments perturbateurs dépendant seulement de θ et de θ'' ne causent pas de perturbations de l'amplitude.

Ce théorème s'ensuit du précédent.

V. Le moment perturbateur a le plus grand effet sur la durée d'oscillation, s'il agit quand le pendule a sa plus grande élongation; alors la perturbation de l'amplitude est nulle.

Le moment perturbateur a le plus grand effet sur l'amplitude, s'il agit

quand le pendule passe par la verticale; alors la perturbation de la durée d'oscillation est nulle.

VI. Quand S est une quantité périodique avec une période différant de la période du pendule, la perturbation moyenne est négligeable.

Posons:

$$S = 2C \cos(ft + \alpha) = Ce^{i(ft + \alpha)} + Ce^{-i(ft + \alpha)}.$$

La formule (3B) donne:

$$\begin{aligned} \delta q^t &= \frac{iC}{n} \int_0^t e^{i[(f-n)t + \alpha]} dt + \frac{iC}{n} \int_0^t e^{-i[(f+n)t + \alpha]} dt = \\ &= \frac{iC}{n(f-n)} \left[e^{i[(f-n)t + \alpha]} - e^{i\alpha} \right] - \frac{iC}{n(f+n)} \left[e^{-i[(f+n)t + \alpha]} - e^{-i\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est un vecteur périodique avec une période $\frac{2\pi}{f-n}$; le module varie entre les valeurs $\frac{2C}{n(f-n)}$ et 0.

Le second terme est un vecteur périodique avec une période $\frac{2\pi}{f+n}$; le module varie entre les valeurs $\frac{2C}{n(f+n)}$ et 0.

Le module de δq^t ne pourra jamais dépasser la somme des modules maximaux des deux termes c'est à dire:

$$\frac{4Cf}{n(f^2 - n^2)}.$$

Le changement total de l'amplitude ne peut donc dépasser cette limite. Il faut toutefois remarquer, qu'il peut déjà l'atteindre après un petit nombre d'oscillations.

En considérant une durée t contenant un grand nombre de périodes $2T$, la valeur moyenne de δq^{2T} , étant égale à $\frac{2T}{t} \delta q^t$, devient très petite. Si l'on fait t assez grand, les perturbations moyennes de la durée d'oscillation et de l'amplitude sont donc négligeables.

§ 5. Applications des formules pour deux pendules synchrones oscillant à la fois et soumis à un même moment perturbateur.

Nous démontrerons dans les paragraphes suivants que ce cas se produit quand les perturbations sont causées par des mouvements du support (soit que ceux-ci sont occasionnés par l'entraînement par les pendules, soit qu'ils proviennent des mouvements du sol), à condition que les pendules oscillent sur le même support, dans un même plan vertical, de sorte que les translations des points de suspension soient égales. Nous supposons donc que ces points de suspension sont reliés si solidement, que le changement de la distance par la déformation élastique est négligeable.

On peut déduire les théorèmes suivants:

I. Si les deux pendules ont la même amplitude et une différence de phase π les perturbations des moyennes des deux durées d'oscillation et des deux amplitudes sont nulles.

Ce théorème se déduit des formules (5 A c) et (5 B c) puisque:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \cos q_1 &= - \cos q_2 \\ \sin q_1 &= - \sin q_2. \end{aligned}$$

On trouve donc:

$$\begin{aligned} \delta \tau_1 &= - \delta \tau_2 \\ \delta a_1 &= - \delta a_2 (6) \end{aligned}$$

Ce résultat permet donc d'éliminer la perturbation causée par les mouvements du sol, mais puisqu'il n'est pas toujours possible de réaliser les conditions mentionnées ci-dessus pendant un temps illimité, nous déduisons encore d'autres théorèmes, qui servent à atteindre le même but dans des conditions plus générales.

II. Si au début l'un des pendules est en repos, on peut déduire les perturbations de l'autre, en mesurant l'amplitude du premier et la différence des phases à la fin.

Puisque $S_1 = S_2$ et $n_1 = n_2$
la formule (3 B) donne: $\delta q_1' = \delta q_2'$.

On reconnaît aisément que si les pendules ne sont pas exactement synchrones, de sorte que n_1 et n_2 diffèrent un peu, cette formule n'est applicable que pour une durée limitée.

q_2 étant nul au commencement, on a

$$q_2 = \delta q_2' = \delta q_1'.$$

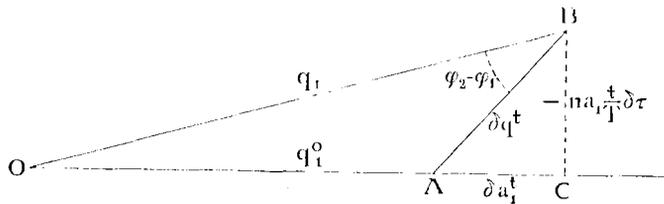


Fig. 4.

En supposant $\delta q_1'$ petit par rapport à q_1 on peut remplacer $\angle BAC$ par $\angle OBA$, donc

$$\delta \tau_1 = \frac{T}{n} \frac{a_2}{t a_1} \sin (q_2 - q_1) \qquad \delta a_1 = a_2 \cos (q_2 - q_1) \quad (7 A)$$

Si t est trop grand, de sorte que l'hypothèse n'est plus permise, il faut faire usage d'autres formules, qu'on peut aisément déduire des figures (3) et (4).

Nous verrons plus tard, que dans le cas où il n'y a pas de mouvements du sol, de sorte que les perturbations sont causées seulement par l'entraînement

du support par les pendules, le second pendule se mettra en mouvement avec $(q_2 - q_1) = \frac{\pi}{2}$.

Les formules se réduisent alors à :

$$\delta \tau_1 = \frac{\tau}{n} \frac{a_2}{l a_1} \quad \delta a_1' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7 B)$$

et la méthode devient identique avec la méthode ordinaire pour la détermination du coefficient de l'entraînement (voir § 13, page 44).

III. Les perturbations des deux pendules se laissent déduire, si la perturbation de la différence des durées d'oscillation et celle du rapport des amplitudes sont connues.

Introduisons la quantité complexe P :

$$P = \frac{q_2}{q_1} = p e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{où} \quad p = \frac{a_2}{a_1}.$$

L'argument de P est donc la différence des phases, le module le rapport des amplitudes.

La perturbation de P étant supposée connue, il faut en déduire les autres perturbations.

En négligeant les carrés des δq on a :

$$\delta P^{2T} = \frac{q_1 \delta q_2^{2T} - q_2 \delta q_1^{2T}}{q_1^2} = \frac{(q_1 - q_2)}{q_1^2} \delta q^{2T},$$

donc :

$$\frac{\delta q^{2T}}{q_2} = - \frac{1}{P - 1} \frac{\delta P^{2T}}{P},$$

$$\frac{\delta q^{2T}}{q_1} = - \frac{P}{P - 1} \frac{\delta P^{2T}}{P}.$$

En exprimant ces formules dans les quantités réelles du problème, à l'aide des relations qu'on déduit aisément de la figure (3) :

$$\frac{\delta q^{2T}}{q_1} = \frac{\delta a_1^{2T}}{a_1} - 2 i n \delta \tau_1,$$

$$\frac{\delta q^{2T}}{q_2} = \frac{\delta a_2^{2T}}{a_2} - 2 i n \delta \tau_2,$$

$$\frac{\delta P^{2T}}{P} = \frac{\delta p^{2T}}{p} - 2 i n (\delta \tau_2 - \delta \tau_1),$$

on trouve :

$$\delta \tau_1 = - \frac{\sin (q_2 - q_1)}{2 n l^2} \delta p^{2T} + \frac{p \cos (q_2 - q_1) - p^2}{l^2} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad . \quad . \quad (8 A)$$

$$\delta \tau_2 = - \frac{\sin (q_2 - q_1)}{2 n l^2} \delta p^{2T} - \frac{p \cos (q_2 - q_1) - 1}{l^2} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad . \quad . \quad (8 B)$$

$$\delta a_1^{2T} = a_2 \frac{1}{p} \frac{\cos (q_2 - q_1) - 1}{l^2} \delta p^{2T} + 2 n a_2 \frac{\sin (q_2 - q_1)}{l^2} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1) \quad (8 C)$$

$$\delta a_2^{2T} = - a_1 \frac{p \cos (q_2 - q_1) - 1}{l^2} \delta p^{2T} + 2 n a_1 \frac{\sin (q_2 - q_1)}{l^2} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad (8 D)$$

$$\text{où} \quad l^2 = p^2 + 1 - 2 p \cos (q_2 - q_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8 E)$$

Les formules (8) permettent de calculer les perturbations dans le cas général, où p et $(\varphi_2 - \varphi_1)$ ont une valeur quelconque, à condition qu'on connaisse la perturbation de $(\tau_2 - \tau_1)$ et de p . On voit aisément qu'à cette fin il faut connaître la valeur non perturbée de $(\tau_2 - \tau_1)$ et la différence des coefficients d'amortissement de l'amplitude.

Dans le cas $p = 1$, $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$, les formules font défaut; les perturbations δp et $(\delta\tau_2 - \delta\tau_1)$ sont nulles, et les coefficients infinis.

Dans le cas $p = 1$, $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$, les formules se réduisent aux formules (6).

§ 6. Formules pour les perturbations par les mouvements du support.

Les mouvements du support occasionnent une translation parallèle du système des coordonnées. Si x_0 et y_0 sont les coordonnées du point d'origine O dans un autre système de coordonnées fixes, la résultante des forces d'inertie, agissant dans le centre de gravité du pendule, a les composantes $-m x''$ et $-m y''$.

En négligeant les puissances supérieures de θ , on trouve pour le moment perturbateur autour de O :

$$M_s = m h \theta x_0'' + m h y_0'',$$

donc

$$S = \frac{x_0''}{l} \theta + \frac{y_0''}{l}.$$

θ étant petit, le premier terme, c'est à dire l'influence des mouvements en sens vertical est négligeable par rapport à l'influence des mouvements en sens horizontal.

On a donc

$$S = \frac{y_0''}{l} \dots \dots \dots (9 A)$$

et en vertu de (3 B):

$$\delta q' = \frac{i}{n l} \int_0^t y_0'' e^{-int} dt \dots \dots \dots (9 B)$$

et de (5 Ab) et (5 Bb):

$$\delta \tau = -\frac{I}{2 g a} \int_0^{2T} y_0'' \cos (n t + \varphi_0) dt \dots \dots \dots (9 C)$$

$$\delta a^{2T} = \frac{n}{g} \int_0^{2T} y_0'' \sin (n t + \varphi_0) dt \dots \dots \dots (9 D)$$

§ 7. Applicabilité des méthodes du § 5 pour l'élimination de l'effet des mouvements du support; examen de ces méthodes.

Si les pendules qu'on fait osciller ensemble sont synchrones, et si les y_0'' sont égaux, ils ont le même terme perturbateur S (9 A) et on peut donc appliquer toutes les méthodes d'élimination du § 5.

Pour que les y_0'' soient égaux il faut :

1^o. que les pendules oscillent dans le même plan vertical, et que les points de suspension soient reliés si fermement, que la déformation élastique de leur écartement par les efforts exercés par les pendules soit négligable.

2^o. que les mouvements du support ne causent pas de changement dans le mouvement du couteau sur le plan de suspension, de sorte que les translations horizontales des plans de suspension soient identiques à celles du couteau.

L'appareil VON STERNECK satisfait à la première hypothèse; il contient quatre pendules pouvant osciller deux à deux dans le même plan (les deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre) et les plans de suspension sont reliés solidement. Les pendules sont à peu près synchrones, la différence des durées d'oscillation de chaque paire est d'environ $30 \cdot 10^{-7}$ seconde.

La seconde hypothèse est bien acceptable, surtout s'il n'y a pas de chocs violents, mais cependant il est désirable de s'en assurer encore par des expériences. L'observation directe de ce qui se passe près du couteau est très difficile à cause de la petitesse des mouvements, nous avons donc préféré une méthode indirecte. On peut réaliser par exemple les conditions du § 5 I, c'est à dire qu'on fait osciller les deux pendules à amplitudes égales et phases contraires, et on observe si les perturbations des deux pendules s'accordent avec l'hypothèse en question. Les résultats de ces observations ont été très satisfaisants: aux erreurs d'observation près les perturbations constatées des deux durées d'oscillation et des deux amplitudes étaient toujours égales avec signe inverse. On peut donc conclure que les $\delta q'$ ont été égales, ce qui prouve l'égalité des mouvements horizontaux des couteaux y_0 . Il est très probable qu'il est permis de généraliser ce résultat pour le cas où la différence des phases et le rapport des amplitudes ont des valeurs arbitraires.

Nous montrerons d'ailleurs encore dans le § 5 du chap. V que les résultats des observations de voyage à deux pendules aux stations où il y avait eu des mouvements du sol, confirment tous le résultat trouvé, et dans le § 8 du même chapitre, que l'élimination des mouvements du sol qui n'aurait été possible si l'hypothèse était erronée, a été si effective que l'erreur moyenne des observations aux stations sur terrain meuble ne diffère pas sensiblement de celle sur terrain ferme.

En dernier lieu l'égalité des $\delta q'$ est confirmée encore par toutes les observations de deux pendules sur terrain ferme. L'influence mutuelle constatée s'accorde avec les formules que nous obtiendrons dans les §§ suivants en partant de l'égalité des $\delta q'$. Les $\delta q'$, causés par l'entraînement du support par l'effort des pendules, étant égaux, il n'y a pas de raison pour que les $\delta q'$ causés par les mouvements du support provenant des mouvements du sol ne le soient pas.

Nous avons donné un peu amplement les raisons pour lesquelles nous avons cru pouvoir accepter cette hypothèse, puisqu'on peut trouver une opinion différente dans l'essai suivant sur l'influence des mouvements du sol :

O. E. SCHIÖTZ: „Resultate der im Sommer 1893 in dem nördlichsten Teile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen nebst einer Untersuchung über den Einfluss von Bodenerschütterungen auf die Schwingungszeit eines Pendels.“ („Résultats des observations de pendule faites dans l'été de 1893 dans la partie septentrionale de la Norvège, et une recherche concernant l'influence des mouvements du sol sur la durée d'oscillation d'un pendule.“) Au cours de quelques observations SCHIÖTZ a trouvé une diminution de la durée d'oscillation. Une déduction théorique démontrant qu'un mouvement irrégulier du point de suspension n'a pas d'influence, il a cherché une autre cause. Il suppose que le couteau glisse sur le plan de suspension et que par cela la composante horizontale de l'effort du pendule diminue, de sorte que l'entraînement du support par cet effort est plus petit, ainsi que la perturbation qui en résulte. ¹⁾ Cette explication ne nous satisfait pas complètement, spécialement quant à la possibilité d'une diminution sensible de l'effort du pendule, et d'ailleurs il ne nous paraît pas nécessaire d'y recourir, puisque nous démontrerons dans le § suivant que la conclusion que des mouvements irréguliers du point de suspension n'ont pas d'influence n'est vraie que pour une durée infinie. Pour une durée t les perturbations moyennes sont proportionnelles à \sqrt{t} ; elles ont un caractère irrégulier et peuvent être aussi bien négatives que positives. Ces conclusions ont été confirmées complètement par les perturbations observées dans les Pays-Bas.

Nous serions donc portés à croire que les perturbations trouvées par SCHIÖTZ avaient accidentellement toutes le signe négatif (le nombre d'ailleurs n'est pas grand) ou bien qu'il y avait une autre cause cachée.

Ayant donc admis l'égalité des $\delta q'$, ce qui comporte l'applicabilité des méthodes d'élimination du § 5, nous les examinerons maintenant de plus près.

La première méthode est la plus facile. En faisant osciller les deux pendules à amplitudes égales et à phases contraires la perturbation est éliminée en prenant simplement la moyenne des deux durées d'oscillation. La méthode a un seul inconvénient; si les pendules ne sont pas rigoureusement synchrones, la différence des phases et le rapport des amplitudes ne se maintiennent pas. Pour les pendules employés, dont la différence $(\tau_2 - \tau_1)$ est

1) Voir aussi „Observations de pendule“ Tome XV Mémorial du dépôt de la guerre, page 19 et 20, où DEFFORGES fait une supposition semblable pour expliquer la différence des résultats des méthodes statique et dynamique pour déterminer le coeff. de l'entraînement.

d'environ $30 \cdot 10^{-7}$ sec., le changement s'effectue très lentement, de sorte qu'on peut faire des observations de deux heures sans difficultés.

Pour les observations de plus de huit heures que nous avons faites pendant les dernières tournées nous avons dû recourir à une des deux autres méthodes.

Nous avons choisi la troisième, puisque la seconde a les inconvénients suivants :

1^o. La mise en repos d'une pendule nécessite l'aide d'une seconde personne.

2^o. Si on ne fait pas d'observations intermédiaires, les réductions à l'amplitude zéro sont difficiles à calculer, puisque la loi de changement des amplitudes de deux pendules oscillant ensemble est assez compliquée.

L'application de la troisième méthode exige la connaissance de la valeur non perturbée de $(\tau_2 - \tau_1)$ et de la différence des coefficients d'amortissement de l'amplitude : $(k_2 - k_1)$. Des observations spéciales ont démontré que pour les pendules hollandais $(k_2 - k_1)$ est nul. La valeur de $(\tau_2 - \tau_1)$ a été déduite de nouveau à chaque station des observations de courte durée exécutées suivant la première méthode.

Dans le cas général où p et $(\varphi_2 - \varphi_1)$ sont arbitraires la méthode a le même inconvénient que la première : ces quantités changeront pendant l'observation. Cependant nous démontrerons dans les §§ 10 et 11 qu'il y a deux paires de valeurs pour p et $(\varphi_2 - \varphi_1)$ qui restent à peu près constantes, même pendant une très longue durée, et on peut donc réaliser une de ces deux possibilités.

On reconnaît aisément que si $(\tau_2 - \tau_1)$ est nul, ces valeurs sont :

$$p = 1 \text{ avec } \varphi_2 - \varphi_1 = \pi,$$

$$p = 1 \text{ avec } \varphi_2 - \varphi_1 = 0,$$

c'est à dire qu'alors les conditions de la première méthode restent remplies pendant un temps indéfini.

Pour une valeur arbitraire de $(\tau_2 - \tau_1)$, les valeurs spéciales de p dépendent essentiellement du rapport de cette quantité au coefficient de l'entraînement, mais les valeurs de $(\varphi_2 - \varphi_1)$ restent à peu près π et 0. Nous réaliserons toujours la première de ces deux valeurs et nous poserons

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi + \alpha$$

où α est petit.

En négligeant les puissances supérieures de α les formules (8) se simplifient :

$$\delta \tau_1 = \frac{\alpha}{2n(p+1)^2} \delta p^{2r} - \frac{p}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad \dots (10 A)$$

$$\delta \tau_2 = \frac{\alpha}{2n(p+1)^2} \delta p^{2r} + \frac{1}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad \dots (10 B)$$

Le premier terme est presque toujours négligeable puisque α et δp sont tous les deux très petits, et on ne retient donc généralement que :

$$\delta \tau_1 = - \frac{p}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad \dots \quad (11 A)$$

$$\delta \tau_2 = \frac{1}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1). \quad \dots \quad (11 B)$$

Si on aurait choisi l'autre possibilité ($q_2 - q_1 = \alpha$) on aurait trouvé un facteur plus grand de $(\delta \tau_2 - \delta \tau_1)$ dans les membres droites, ce qui occasionnerait un plus grand effet d'une erreur dans cette quantité.

Nous ajoutons encore que pour les pendules employés la valeur spéciale de p fluctuait entre 1.25 et 1.35 suivant les différentes valeurs du coefficient de l'entraînement.

Le but principal, l'élimination des perturbations est donc atteint. Dans les §§ suivants nous donnerons encore une analyse de ces perturbations, d'abord de celles occasionnées par les mouvements du sol, ensuite de celles occasionnées par l'entraînement du support par le mouvement des pendules.

§ 8. Perturbations causées par les mouvements du sol.

Puisque les mouvements du sol sont inconnus, le calcul précis des perturbations est impossible. Il faut donc se contenter de déduire des valeurs moyennes servant principalement à se faire une opinion sur les rapports probables des perturbations des différentes quantités du problème.

Afin de pouvoir déduire ces valeurs moyennes il faut supposer que les mouvements du sol sont irréguliers, hypothèse qui d'ailleurs s'accorde avec les perturbations trouvées dans les Pays-Bas. Nous supposerons que y_0 , la coordonnée horizontale de O par rapport à un système fixe, a le même caractère qu'une erreur accidentelle; dans ce cas l'accélération y_0'' l'aura aussi et le vecteur $y_0'' e^{-int}$, ayant un module y_0'' et un argument nt , aura le caractère d'une erreur accidentelle dans le plan. C'est à dire, que si on considère un temps contenant un très grand nombre de périodes $2T$, les extrémités de tous les vecteurs $y_0'' e^{-int}$ seront distribuées dans un plan autour de O , sans qu'une des directions soit privilégiée. La somme

$$\int_0^t y_0'' e^{-int} dt$$

aura donc une direction arbitraire, tandis que le module suivra la loi des erreurs accidentelles. La valeur moyenne de ce module sera donc proportionnelle à \sqrt{t} , c'est à dire qu'on peut la représenter par :

$$G \sqrt{t}.$$

G ne dépendra que de y_0'' ; il sera indépendant de n , puisqu'avec une autre valeur de n , l'argument de chaque quantité $y_0'' e^{-int} dt$ est bien autre,

mais le module est le même, et la distribution moyenne des extrémités autour de O aussi. La valeur moyenne de la somme n'a donc pas changé.

Selon la formule (9 B) $\delta q'$ est donc un vecteur ayant un argument arbitraire et un module moyen

$$\frac{G}{nl} \sqrt{t} = \frac{nG}{g} \sqrt{t}$$

et la projection de $\delta q'$ sur q_0 ou sur un axe perpendiculaire à q_0 , a une valeur moyenne:

$$\frac{nG}{g} \sqrt{\frac{t}{2}} \dots \dots \dots (12 A)$$

En vertu de (4 Aa) et (4 Ba) les valeurs moyennes des perturbations sont donc:

$$[\delta T_t] = \frac{T}{nat} \times \text{la projection moyenne de } \delta q' = \frac{GT}{ag\sqrt{2t}} \dots (12 B)$$

$$[\delta a'] = \text{la projection moyenne de } \delta q' = \frac{nG}{g} \sqrt{\frac{t}{2}} \dots (12 C)$$

Les parenthèses carrées indiquent qu'on a affaire à des valeurs moyennes, l'index t en bas que δT_t est la valeur moyenne de δT pendant un temps t , et l'index t en haut qu'on considère le changement total de a pendant le temps t .

La pesanteur se déduisant par la formule:

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} l$$

l'erreur moyenne dans une détermination ordinaire de g , en conséquence des mouvements du sol aura la valeur:

$$[\delta g_t] = \frac{2\pi^2 l}{T^3} [\delta T_t] = \frac{2G}{a\sqrt{2t}} \dots \dots \dots (13)$$

De cette formule on peut tirer les conclusions suivantes:

- 1^o. L'erreur moyenne dans le résultat g est indépendante de la longueur du pendule employé.
- 2^o. L'erreur moyenne dans le résultat g est en proportion inverse de l'amplitude a .

Si au début le pendule est en repos, l'amplitude, qu'il reçoit est égale au module de $\delta q'$. La valeur moyenne de l'amplitude après un temps t est donc:

$$[a^t] = \frac{nG}{g} \sqrt{t} \dots \dots \dots (14)$$

Cette formule fournit une méthode facile de déterminer G à une station; on n'a qu'à mesurer plusieurs fois l'amplitude qu'un pendule en repos acquiert par les mouvements du sol. En substituant la valeur de G trouvée ainsi dans les formules 12 B et C on obtient la valeur moyenne des perturbations de T et a , auxquelles il faut s'attendre.

Pour la déduction de l'influence des mouvement du sol sur deux pendules oscillant ensemble, il faut remarquer que les perturbations ne sont pas indépendantes, puisque les $\delta q'$ sont égaux. Par exemple le carré de la perturbation moyenne de la somme $(\tau_1 + \tau_2)$ ou de la différence $(\tau_2 - \tau_1)$ n'est pas égal à la somme des carrés des perturbations moyennes de τ_1 et de τ_2 .

Nous nous bornerons à déduire les formules pour les perturbations moyennes des quantités suivantes, dont on a le plus besoin :

$$(\tau_1 + \tau_2), (\tau_2 - \tau_1), p = \frac{a_2}{a_1}, (a_1^2 + a_2^2).$$

Nous partons des formules (voir page 14) :

$$\frac{\delta P'}{P} = \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} \delta q'$$

où

$$\frac{\delta P'}{P} = \frac{\delta p'}{p} - i \frac{n t}{T} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1).$$

En y substituant la valeur moyenne de la projection de $\delta q'$ sur une direction arbitraire :

$$\frac{n G}{g} \sqrt{\frac{t}{2}}$$

et en remarquant que le module de $(q_2 - q_1)$ est

$$a_1 \sqrt{p^2 + 1 - 2 p \cos (q_2 - q_1)}$$

on obtient :

$$[\delta (\tau_2 - \tau_1)] = \frac{G T}{g a_2 \sqrt{2 t}} \sqrt{p^2 + 1 - 2 p \cos (q_2 - q_1)} \quad . \quad (15 A)$$

$$[\delta p'] = \frac{n G}{g a_1} \sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{p^2 + 1 - 2 p \cos (q_2 - q_1)}. \quad . \quad (15 B)$$

En partant des formules :

$$\frac{\delta (q_1 q_2)'}{q_1 q_2} = \frac{(q_1 + q_2)}{q_1 q_2} \delta q'$$

où

$$\frac{\delta (q_1 q_2)'}{q_1 q_2} = \frac{\delta (a_1 a_2)'}{a_1 a_2} - i \frac{n t}{T} (\delta \tau_1 + \delta \tau_2)$$

et en remarquant que le module de $(q_1 + q_2)$ est

$$a_1 \sqrt{p^2 + 1 + 2 p \cos (q_2 - q_1)},$$

on trouve :

$$[\delta (\tau_1 + \tau_2)] = \frac{G T}{g a_2 \sqrt{2 t}} \sqrt{p^2 + 1 + 2 p \cos (q_2 - q_1)} \quad . \quad (15 C)$$

La formule pour la perturbation de $(a_1^2 + a_2^2)$ se trouve en remarquant que :

$$(a_1^2 + a_2^2) = q_1 \cdot q_1 + q_2 \cdot q_2$$

donc

$$\delta (a_1^2 + a_2^2)' = 2 (q_1 + q_2) \cdot \delta q'$$

et on obtient :

$$[\delta (a_1^2 + a_2^2)'] = \frac{n G a_1}{g} \sqrt{2 t} \sqrt{p^2 + 1 + 2 p \cos (q_2 - q_1)}. \quad (15 D)$$

La formule (15 C) confirme le premier théorème du § 5 : la perturbation de $(\tau_1 + \tau_2)$ est nulle si $(q_2 - q_1) = \pi$ et $p = 1$.

Dans ce cas la perturbation moyenne de $(\tau_2 - \tau_1)$ est selon (15 A) :

$$[\delta(\tau_2 - \tau_1)] = \frac{2GT}{g\alpha\sqrt{2t}} \dots \dots \dots (16)$$

Cette formule fournit encore une simple méthode de déterminer G : en employant la première méthode d'observation du § 5 les perturbations de $(\tau_2 - \tau_1)$ fournissent la valeur de G sans qu'il est nécessaire de faire des observations spéciales.

Nous avons employé cette méthode-ci pour le calcul de G aux différentes stations dans le chapitre V, § 3.

§ 9. Perturbations causées par l'entraînement du support par le mouvement des pendules.

Nous examinerons d'abord les perturbations causées par l'action d'une force variable arbitraire à direction constante L agissant au support.

La forme du support est généralement trop compliquée pour pouvoir déduire les déformations ; d'ailleurs souvent le point d'appui du support y participe aussi. Nous supposons maintenant que l'ensemble du support et du point d'appui obéit aux lois de l'élasticité, c'est à dire que les déformations causées par une force constante lui soient proportionnelles. Si L était constante on pourrait donc mettre alors :

$$L = \gamma y_0$$

où y_0 est de nouveau la composante horizontale du déplacement du point de suspension du pendule. L n'étant pas constante, il faut y ajouter encore deux petits termes, pour tenir compte de la friction intérieure et de l'inertie du support. En supposant toutes les déformations proportionnelles à y_0 nous posons :

$$L = \gamma y_0 + K y_0' + M y_0'' \dots \dots \dots (17)$$

où K et M sont petits par rapport à γ .

Nous déduirons maintenant la perturbation δq^t causée par L .

La formule 9 B donne en l'intégrant partiellement et en remarquant que le premier terme du résultat est négligeable pour une valeur assez grande de t :

$$\delta q^t = \frac{i}{nl} \int_0^t y_0'' e^{-int} dt = -\frac{1}{l} \int_0^t y_0' e^{-int} dt = -i \frac{n}{l} \int_0^t y_0 e^{-int} dt.$$

En combinant cela avec (17) on obtient :

$$\int_0^t L e^{-int} dt = \left(i\gamma \frac{l}{n} - Kl - iMnl \right) \delta q^t = i \frac{\lambda l}{n} e^{i\alpha} \delta q^t$$

où λ et α s'ensuivent de la figure :

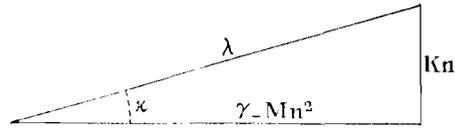


Fig. 5.

ou, en vertu de la petitesse de $\frac{K}{\gamma}$ et $\frac{M}{\gamma}$ des formules:

$$\lambda = (\gamma - Mn^2) \quad \alpha = \frac{nK}{\lambda} \dots \dots \dots (18 A)$$

Nous obtenons donc pour $\delta q'$:

$$\delta q' = -i \frac{n}{\lambda l} \int_0^t L e^{-i(nl + \alpha)t} dt \dots \dots \dots (18 B)$$

et pour $\delta \tau$ et $\delta a^{2'}$ d'après les formules (5):

$$\delta \tau = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha \lambda l} \int_0^{2T'} L \cos(\varphi + \alpha) dt \dots \dots \dots (18 C)$$

$$\delta a^{2'} = -\frac{n}{\lambda l} \int_0^{2T'} L \sin(\varphi + \alpha) dt \dots \dots \dots (18 D)$$

Substituons maintenant pour L la composante horizontale de la force de suspension d'un second pendule que nous distinguerons par l'index 2 du premier.

En négligeant des quantités de second ordre, la composante horizontale de la force de suspension a la valeur

$$L = -h_2 m_2 \theta_2'' = \frac{m_2 h_2}{l_2} g \theta_2 = \frac{m_2 h_2}{l_2} g a_2 \cos \varphi_2.$$

Si nous substituons cela dans (18 C) et (18 D) en donnant l'index 21 aux quantités γ , λ et α et en mettant

$$s_{21} = \frac{m_2 h_2 T_1 g}{2 l_1 l_2 \lambda_{21}} \dots \dots \dots (19 A)$$

nous trouvons:

$$\begin{aligned} \delta \tau &= \frac{s_{21}}{T_1} \rho \int_0^{2T_1} \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1 + z_{21}) dt = \\ &= \frac{s_{21}}{2 T_1} \rho \int_0^{2T_1} \cos(\varphi_2 + \varphi_1 + z_{21}) dt + \frac{s_{21}}{2 T_1} \rho \int_0^{2T_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - z_{21}) dt. \end{aligned}$$

A condition que les durées d'oscillation soient à peu près égales on voit aisément que le cosinus dans la seconde intégrale est à peu près constant et que la première intégrale peut être négligée par rapport à la seconde.

On a donc:

$$\delta \tau_1 = s_{21} \rho \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - z_{21}) \dots \dots \dots (19 B)$$

et de même on trouve :

$$\delta a_1^{2'} = 2 n_1 s_{21} a_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1 - \kappa_{21}) (19 C)$$

Les formules 18 C et D et 19 B et C ne sont valables que si $\delta \tau$ est petit, puisque nous avons fait usage des formules (5) pour les déduire.

On ne pourrait donc pas s'en servir, quand les amplitudes sont petites. Nous prouverons maintenant, qu'elles sont aussi valables dans ce cas-ci.

La formule (18 B) pour $\delta q'$ est encore généralement valable. Nous y substituons :

$$L = \frac{m_2 l_2}{2 l_2} g a_2 (e^{i\phi_2} + e^{-i\phi_2})$$

En mettant :

$$d_{21} = \frac{m_2 l_2 n_1 g}{2 l_1 l_2 \lambda_{21}} e^{-i\kappa_{21}} (20 A)$$

de sorte que

$$d_{21} = \frac{\pi}{T_1^2} e^{-i\kappa_{21}} s_{21} (20 B)$$

nous obtenons :

$$\delta q_1' = -i d_{21} \int_0^t a_2 e^{i(\phi_2 - n_1 t)} dt - i d_{21} \int_0^t a_2 e^{-i(\phi_2 + n_1 t)} dt .$$

Nous pouvons de nouveau remarquer que si les durées d'oscillation sont à peu près égales la seconde intégrale peut être négligée par rapport à la première. On reconnaît alors en vertu de la formule (3 B) :

$$\delta q_1' = \frac{i}{n} \int_0^t S_1 e^{-i n t} dt = -i d_{21} \int_0^t a_2 e^{i(\phi_2 - n_1 t)} dt$$

que la perturbation reste la même si on met pour le terme perturbateur S_1

$$S_1 = -n d_{21} a_2 e^{i\phi_2} = -n d_{21} q_2$$

au lieu de la valeur véritable de S_1 .

En substituant cette valeur de S_1 dans l'équation différentielle de q_1 (formule 2 B), on obtient une équation équivalente à l'équation véritable de q_1 .

On a donc :

$$q_1' = i n q_1 - i d_{21} q_2 + i \frac{S_1}{n} (20 C)$$

où S_1 représente maintenant la somme des autres termes perturbateurs.

Nous nous servirons plus tard de cette formule généralement valable pour l'intégration.

En divisant (20 C) par q_1 et en exprimant l'équation dans les quantités réelles on trouve immédiatement les formules 19 B et C, ce qui prouve que ces formules aussi sont valables dans tous les cas.

On trouve les perturbations du pendule par l'entraînement du support par son propre effort en mettant $p = 1$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ et en échangeant l'index 2 par 1.

Puisque α est petit on peut supprimer le facteur $\cos \alpha$ et on trouve :

$$\begin{aligned} \delta \tau_1 &= s_{11}, \\ \delta a_1^{2T} &= -2 n_1 s_{11} a_1 \alpha_{11}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat bien connu que la perturbation de τ_1 est constante, tandis que la perturbation de a_1 est proportionnelle à a_1 , c'est à dire qu'elle produit un coefficient constant d'amortissement.

Nous examinerons maintenant de plus près les quantités γ , λ , s et d pour l'appareil VON STERNECK.

Les points de suspension des deux pendules sont reliés si fermement que le changement de leur écartement peut être négligée. On a donc puisque $\gamma_{\alpha\beta}$ est la force, qui, agissant au point α , produit un déplacement 1 du point β :

$$\gamma_{\alpha 1} = \gamma_{\alpha 2}.$$

En outre la théorie de l'élasticité donne l'égalité :

$$\gamma_{21} = \gamma_{12}.$$

On a donc :

$$\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma.$$

Les quantités α et M , résultantes de la friction intérieure et de l'inertie du support sont très petites; le support ayant en outre une forme à peu près symétrique les différences sont négligeables :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha, \\ M_1 &= M_2 = M_3 = M_4 = M. \end{aligned}$$

Les durées d'oscillation étant presque égales on peut substituer dans les formules 19 A et 20 A :

$$l_1 = l_2 = l; \quad T_1 = T_2 = T; \quad n_1 = n_2 = n$$

et on obtient alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda = (\gamma - Mn^2) \\ s_{11} = s_{12} &= m_1 h_1 \frac{Tg}{2 \lambda l^2} \quad d_{11} = d_{12} = m_1 h_1 \frac{n g}{2 \lambda l^2} e^{-i \alpha} \quad \dots \quad (21 A) \\ s_{21} = s_{22} &= m_2 h_2 \frac{Tg}{2 \lambda l^2} \quad d_{21} = d_{22} = m_2 h_2 \frac{n g}{2 \lambda l^2} e^{-i \alpha} \end{aligned}$$

donc en supprimant le second index, qui n'est plus nécessaire :

$$s_2 = w^2 s_1 \quad d_2 = w^2 d_1 \quad \dots \quad (21 B)$$

où
$$w^2 = \frac{m_2 h_2}{m_1 h_1} \quad \dots \quad (21 C)$$

Quand les pendules sont égaux de forme et de poids, comme c'est le cas avec les pendules employés, on a

$$\begin{aligned} w &= 1 \\ s_2 &= s_1 = s \\ d_2 &= d_1 = d. \end{aligned}$$

On reconnaît que s est le coefficient de l'entraînement. En additionnant les perturbations causées par les efforts des deux pendules, on trouve les for-

mules suivantes qui sont prêtes pour l'usage dans la pratique. Pour rendre l'emploi plus facile nous avons déduit les perturbations des amplitudes pendant l'unité de temps en divisant les $\delta a^{2'} T'$ par $2 T'$:

$$\delta \tau_1 = s_1 [1 + \tau v^2 \rho \cos (\varphi_2 - \varphi_1 - \varkappa)] \dots \dots \dots (22 A)$$

$$\delta \tau_2 = s_1 [\tau v^2 + \frac{1}{\rho} \cos (\varphi_2 - \varphi_1 - \varkappa)] \dots \dots \dots (22 B)$$

$$\delta a_1' = \frac{\pi}{T'^2} s_1 [-\varkappa a_1 + \tau v^2 a_1 \sin (\varphi_2 - \varphi_1 - \varkappa)] \dots \dots (22 C)$$

$$\delta a_2' = \frac{\pi}{T'^2} s_1 [-\tau v^2 \varkappa a_2 - a_1 \sin (\varphi_2 - \varphi_1 - \varkappa)] \dots \dots (22 D)$$

qui pour l'appareil STERNECK ($\tau v = 1$ et \varkappa négligeable) se simplifient à:

$$\delta \tau_1 = s [1 + \rho \cos (\varphi_2 - \varphi_1)] \dots \dots \dots (23 A)$$

$$\delta \tau_2 = s [1 + \frac{1}{\rho} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)] \dots \dots \dots (23 B)$$

$$\delta a_1' = \frac{\pi}{T'^2} s a_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \dots \dots \dots (23 C)$$

$$\delta a_2' = -\frac{\pi}{T'^2} s a_1 \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \dots \dots \dots (23 D)$$

Dans le cas que nous avons mentionné déjà plusieurs fois: $\rho = 1, (\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$ les formules (22) donnent:

$$\delta \tau_1 = s_1 (1 - \tau v^2) \quad \delta \tau_2 = -s_1 (1 - \tau v^2)$$

ce qui confirme le premier théorème du § 5: la perturbation de la moyenne est nulle.

Les formules (23) donnent même $\delta \tau_1 = 0$ et $\delta \tau_2 = 0$. Ce résultat ne doit pas surprendre, puisque si le poids des pendules est égal et si $\rho = 1$ et $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi$, les composantes horizontales des efforts des pendules sont égales avec signe inverse. Les efforts se balancent donc et le support n'est pas entraîné.

Les formules (19), (22) et (23) ont le même inconvénient que les formules, trouvées aux pages 14 c. s.: ρ et $(\varphi_2 - \varphi_1)$ changeront pendant les observations. On ne peut donc s'en servir pour une grande durée d'observation, ni pour le calcul des perturbations, ni pour l'étude générale de la marche du phénomène. Il faut donc intégrer les formules. A cette fin nous ferons usage de (20 C):

$$q_1' = i n q_1 - i d_2 q_2 + i \frac{S_1}{n},$$

et d'une équation analogue pour le second pendule.

Ces équations sont intégrables si les autres termes perturbateurs S_1 ne causent qu'une perturbation constante dans la durée d'oscillation et un amortissement constant de l'amplitude. Cela veut dire que si le premier pendule oscillerait seul, l'équation de q_1 deviendrait:

$$q_1 = q_1^0 e^{i r_1 t} \dots \dots \dots (24 A)$$

où

$$r_1 = \mu_1 + i k_1,$$

$\frac{\pi}{\mu_1}$ = la durée d'oscillation du pendule oscillant seul,

k_1 = coefficient d'amortissement de l'amplitude.

L'équation différentielle est alors :

$$q_1 = ir_1 q_1 \dots \dots \dots (24 B)$$

et l'équation (20 C) pour le cas de deux pendules ensemble prend maintenant la forme intégrable :

$$q_1' = ir_1 q_1 - id_2 q_2 \dots \dots \dots (25)$$

avec une équation analogue pour le second pendule.

La condition concernant l'effet des autres causes perturbatrices sur l'amplitude est remplie toujours, mais celle concernant l'effet sur la durée d'oscillation ne l'est, que si les amplitudes sont si petites que la réduction à l'amplitude zéro, proportionnelle au carré de l'amplitude, est négligeable. (Nous négligeons les petites différences de l'effet du couteau pour des amplitudes différentes).

Dans le § 10 nous exécuterons l'intégration pour ce cas, ce qui nous donnera une idée générale de la marche du phénomène.

Dans la pratique des observations ce cas ne se produit pas, puisque les amplitudes sont si grandes que la réduction à l'amplitude zéro n'est pas négligeable, de sorte que la marche du phénomène subit une modification. Nous étudierons cette modification dans le § 11, mais l'intégration complète n'étant plus possible, nous nous contenterons d'un calcul approximatif pour la situation spéciale, mentionnée dans le § 7, où le rapport des amplitudes et la différence des phases sont à peu près constantes. C'est le cas dont nous avons besoin pour l'exécution de la troisième méthode du § 5.

§ 10. Intégration des équations de deux pendules, oscillant ensemble avec des amplitudes si petites, que la réduction à l'amplitude zéro est négligeable.

Nous avons trouvé les équations :

$$\begin{aligned} q_1' &= ir_1 q_1 - id_2 q_2 \\ q_2' &= ir_2 q_2 - id_1 q_1 \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations différentielles linéaires de premier ordre ne donne pas de difficultés même pour un nombre plus grand de pendules.

Pour ne pas entrer en trop de détails, nous ne l'exécuterons pas ici, c'est à dire que nous abandonnerons l'étude des vecteurs q_1 et q_2 , ¹⁾ et que nous nous contenterons d'étudier le vecteur

$$P = \frac{q_2}{q_1}$$

ayant un module $= p = \frac{a_2}{a_1}$ et un argument $(q_2 - q_1)$. L'étude de P révèle presque toutes les propriétés caractéristiques du phénomène.

¹⁾ Une étude plus complète se trouve e. a. dans F. A. VENING MEINESZ : „Bijdragen tot de theorie der slingerwaarnemingen”, Chap. V.

Des formules (25) on déduit:

$$P' - i d_2 P^2 - 2 i \Delta_r P + i d_1 = 0 \dots \dots \dots (26 A)$$

où $2 \Delta_r = (r_2 - r_1) = \frac{\pi}{T_2} (T_1 - T_2) + i (k_2 - k_1) \dots \dots (26 B)$

La solution de (26 A) peut être mise dans la forme:

$$\frac{(P - R_a)}{(P - R_b)} = \frac{(P_0 - R_a)}{(P_0 - R_b)} e^{2 i \Delta_r t} \dots \dots \dots (27)$$

où

$$\Delta = \sqrt{\Delta_r^2 + d_1 d_2} \dots \dots \dots (28 A)$$

$$R_a = \frac{(\Delta - \Delta_r)}{d_2} \dots \dots \dots (28 B)$$

$$R_b = -\frac{(\Delta + \Delta_r)}{d_2} \dots \dots \dots (28 C)$$

$P_0 =$ la valeur initiale de P .

Pour étudier la solution nous en donnerons une interprétation géométrique qui fournit une image fidèle de la marche du phénomène.

Après avoir calculé les quantités Δ_r, d_2, d_1 d'après les formules (20 A) et (26 B) on peut construire $\frac{\Delta}{d_2}$:

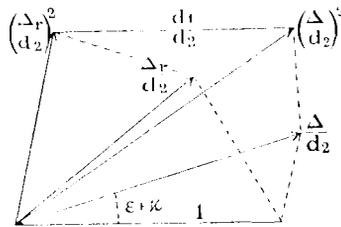


Fig. 6.

Nous désignons le module de Δ par δ et l'argument par ε , de sorte que l'argument de $\frac{\Delta}{d_2}$ est $\varepsilon + \alpha$.

Construisons maintenant R_a et R_b :

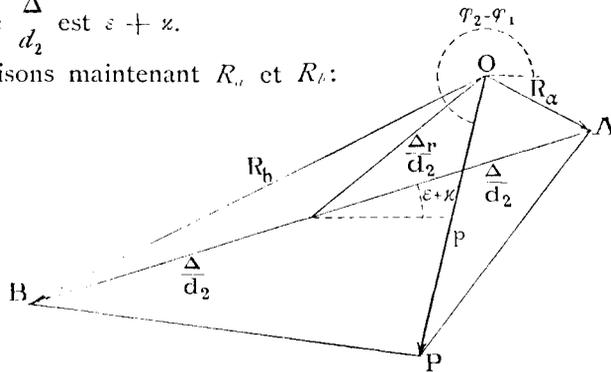


Fig. 7.

On a donc

$$P - R_a = \overline{AP}$$

$$P - R_b = \overline{BP}$$

et le rapport

$$Q = \frac{P - R_a}{P - R_b} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

a un module égal à: $\frac{AP}{BP}$ et un argument à $\angle BPA$.

L'équation (27) montre que le déplacement du point P est tel que :

$$Q = Q_0 e^{2i\Delta t} = Q_0 e^{-2\delta \sin \epsilon t} \times e^{2i\delta \cos \epsilon t}.$$

Le module de Q décroît donc avec un coefficient d'amortissement constant tandis que l'argument croît proportionnellement à t .

Dans deux cas la courbe décrite par P est un cercle :

1°. Si $\epsilon = 0$, le module de Q , c'est à dire le rapport de AP et BP , est constant. P décrit donc un cercle du réseau, dont les membres sont définis par cette propriété.

2°. Si $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ l'argument de Q , c'est à dire l'angle BPA est constant.

P décrit donc un cercle d'un second réseau dont tous les membres passent par les points de base A et B . Ce second réseau est perpendiculaire au premier.

On reconnaît aisément que pour une valeur arbitraire de ϵ , P décrira une courbe qui coupera les cercles du premier réseau sous un angle ϵ et les cercles du second réseau sous un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$.

Nous avons tracé une des courbes possibles, à savoir celle qui correspond à une valeur de ϵ donnée par $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{2}$.

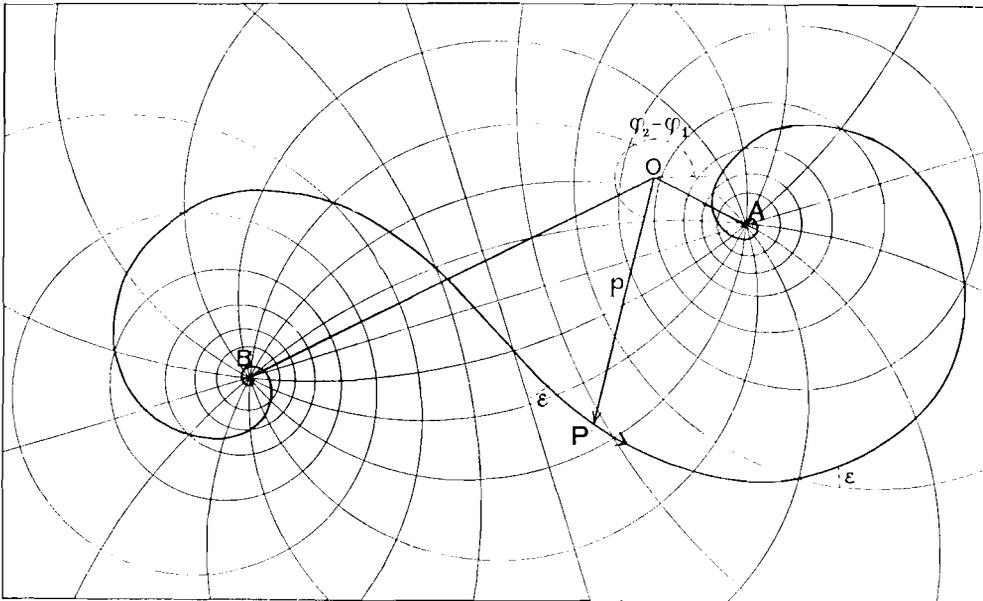


Fig. 8.

On peut tirer maintenant les conclusions suivantes :

1°. Le phénomène a un caractère périodique avec une période

$$\frac{\pi}{\delta \cos \epsilon}.$$

Si ε est nul, P revient à sa valeur initiale après chaque période entière; si ε a une valeur arbitraire, P s'en rapproche seulement après chaque période mais ne l'atteint pas et le phénomène n'est donc pas purement périodique; la déviation est plus grande à mesure que ε est plus grand. L'angle z supposé petit, c'est le cas quand la différence $(k_2 - k_1)$ est plus grande.

2^o. Il y a deux valeurs de P qui sont constantes:

$$\begin{aligned} P &= R_a \\ P &= R_b. \end{aligned}$$

Cela signifie, qu'en ces cas les pendules oscillent avec une même durée d'oscillation et avec des amplitudes ayant un rapport fixe.

Les différences des phases en ces deux cas sont données par les arguments de R_a et de R_b ; les rapports des amplitudes par leurs modules.

L'équation
$$R_a R_b = - \frac{d_1}{d_2} = - \frac{1}{\omega^2}$$

fournit deux relations simples entre ces deux situations spéciales, à savoir:

Les différences des phases font ensemble π .

Le produit des rapports des amplitudes est égal à $\frac{1}{\omega^2}$.

3^o. Une valeur arbitraire de P , quoique subissant des fluctuations plus ou moins grandes, s'approche cependant à la longue d'une des deux valeurs spéciales et s'éloigne de l'autre.

La vitesse d'approche est plus grande à mesure que la différence $k_2 - k_1$ est plus grande. L'approche a un caractère asymptotique: la valeur spéciale n'est atteinte qu'après un temps infini.

Des deux valeurs spéciales de P l'une est donc stable et l'autre instable, puisqu'une déviation de la première augmentera, tandis qu'une déviation de la seconde diminuera. Si $k_2 - k_1$ est positif, c'est à dire si ε est positif, $P = R_a$ est la valeur stable, dans l'autre cas $P = R_b$.

Nous faisons suivre maintenant un aperçu succinct de la marche du phénomène pour des valeurs spéciales des constantes Δ , et d .

A. Δ réel, c'est à dire $\varepsilon = 0$.

Le phénomène est purement périodique, c'est à dire qu'après chaque période P revient à sa valeur initiale. Si par exemple au début une des amplitudes est nulle, elle repassera par zéro après chaque période entière.

Une valeur arbitraire de P ne s'approche donc pas d'une des deux valeurs spéciales. Celles-ci ont toutes les deux le caractère d'équilibre indifférent, c'est à dire qu'une déviation n'augmentera ni ne disparaîtra.

Nous mentionnerons maintenant plus spécialement le cas où la friction intérieure du support est négligeable, c'est à dire:

$$z = 0.$$

Il y a encore deux possibilités qui produisent une valeur réelle de Δ :

I. $k_2 - k_1 = 0.$

Les pendules employés avec l'appareil VON STERNECK étant tout à fait semblables et la friction intérieure du support étant négligeable, ce cas est celui qui se présente si on fait usage de cet appareil. Il nous paraît donc utile de donner pour ce cas quelques formules spéciales.

En mettant:

$$\begin{aligned} \omega &= 1 \\ \tau_2 - \tau_1 &= 2 \Delta r \\ \frac{T^2}{\pi} \Delta &= \Delta_u \end{aligned}$$

on peut déduire:

$$\Delta_u = \sqrt{\Delta r^2 + s^2} \quad (s = \text{coeff. d'entraînement}) \dots (29 A)$$

$$R_u = \frac{(\Delta_u - \Delta r)}{s} \dots (29 B)$$

$$R_l = -\frac{(\Delta_u + \Delta r)}{s} \dots (29 C)$$

$$R, R_s = 1 \dots (29 D)$$

période du phénomène = $\frac{\pi}{\Delta} = \frac{T^2}{\Delta_u}$.

Les quantités Δ_u, R_u et R_l sont donc toutes réelles.

L'interprétation géométrique est donnée par la figure:

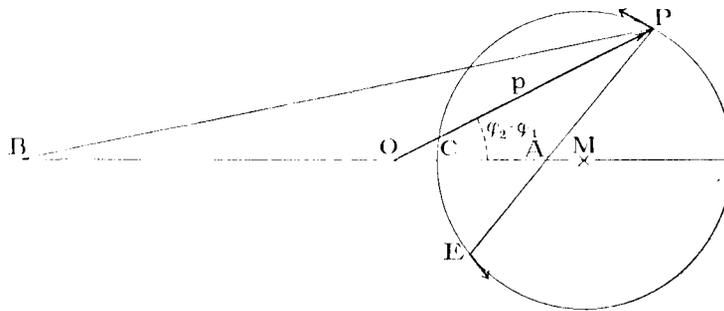


Fig. 9.

Le point P décrit un cercle avec une vitesse telle, que l'angle BPA s'accroît avec:

$$\frac{2 \pi}{T^2} \Delta_u t$$

Puisque $\angle BPA = 2 \angle CPA$, le point E se meut avec une vitesse constante telle, que le radius de E a une vitesse angulaire $2 \frac{\pi}{T^2} \Delta_u$. Cela fournit une méthode simple de construire la position de P pour un moment donné.

Quand au début P est égal à -1 , c'est à dire que P satisfait aux conditions de la première méthode du § 5 pour l'élimination des perturbations, P décrira un cercle autour de B :

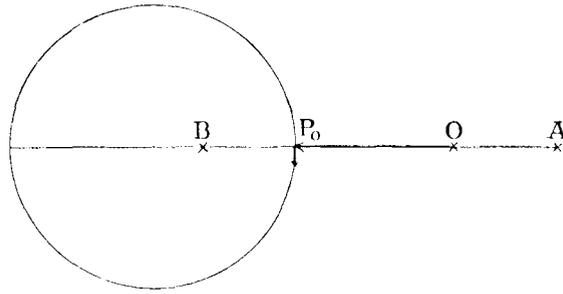


Fig. 10.

On reconnaît aisément que le rayon du cercle et la vitesse de P sont plus grands à mesure que $\frac{\Delta r}{s}$ est plus grand, R_s différant alors plus de -1 .

La durée d'observation permise pour cette méthode est donc plus petite à mesure que le rapport $\frac{\Delta r}{s}$ est plus grand.

II. $(t_2 - t_1) = 0$ avec $(k_2 - k_1)^2 < d_1 d_2$

Dans ce cas ε est aussi nul.

En désignant $(k_2 - k_1)$ par $2 \Delta_k$, on a :

$$\Delta = \sqrt{d_1 d_2 - \Delta_k^2}.$$

Le phénomène est purement périodique avec une période : $\frac{\pi}{\Delta}$.

L'interprétation géométrique est donnée par la figure 11 :

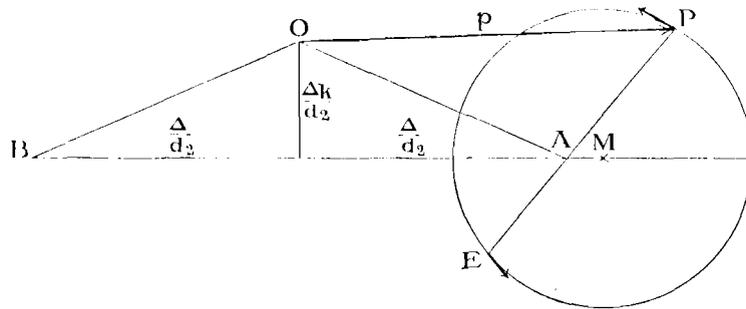


Fig. 11.

qui ne diffère de la figure n°. 9 que par une autre position de O par rapport à A et B . Le mouvement de P est le même : le rayon de E a une vitesse angulaire constante, égale à 2Δ .

Les rapports des amplitudes pour les deux situations spéciales sont les mêmes et égaux à $\frac{1}{\omega}$. Les différences de phase ne sont plus égales à 0 et π .

B. Δ imaginaire, c'est à dire $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Le phénomène n'est plus périodique.

P décrit un cercle passant par A et B . Une situation quelconque s'approche asymptotiquement sans fluctuations d'une des deux situations spéciales en s'éloignant de l'autre.

Nous nous bornerons maintenant de nouveau au cas $z = 0$.

Il n'y a qu'une possibilité qui produit une valeur imaginaire de Δ :

$$(t_2 - t_1) = 0 \text{ avec } \Delta_k > d_1 d_2.$$

On a :

$$\Delta = i \sqrt{\Delta_k^2 - d_1 d_2}$$

et l'interprétation géométrique est donnée par la figure 12.

On peut prouver que la vitesse angulaire du rayon de P est égale à

$$2 d_2 h.$$

h étant la distance de P à AB .

Pour les deux situations spéciales la différence des phases est $\frac{\pi}{2}$.

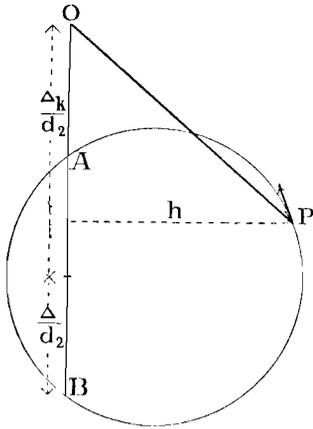


Fig. 12.

C. $\Delta = 0$.

Ce cas se produit quand $\Delta_r = i \sqrt{d_1 d_2}$ c'est à dire que si $z = 0$: $\Delta_r = 0$ et $\Delta_k = i \sqrt{d_1 d_2}$.

Il faut l'étudier séparément, puisque la solution (27) de l'équation (26) n'est plus valable. La solution d'ailleurs se trouve sans difficultés, elle donne les résultats suivants.

Le phénomène n'est pas périodique. Il n'y a maintenant qu'une situation spéciale pour laquelle P est constante :

$$P = -\frac{i}{\omega}.$$

La différence des phases est donc alors $\frac{\pi}{2}$, le rapport des amplitudes $\frac{1}{\omega}$.

Une situation quelconque s'en approche asymptotiquement sans fluctuation.

L'interprétation géométrique est donnée par la figure 13.

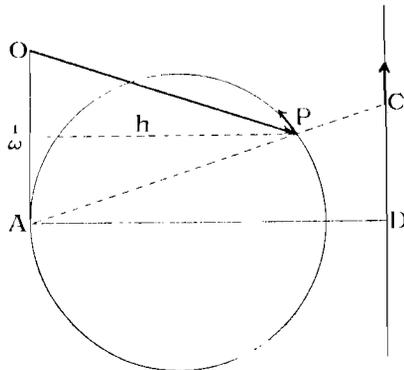


Fig. 13.

Le rayon de P a une vitesse angulaire égale à $2 d_2 h_1$, ce qu'on peut définir aussi par la propriété, que l'image réciproque C de P par rapport au pôle A se meut avec une vitesse constante d_2 sur la droite DC .

§ 11. **Intégration des équations de deux pendules, oscillant ensemble avec des amplitudes si grandes, que la réduction à l'amplitude zéro n'est pas négligeable.**

La réduction de T à l'amplitude zéro a la valeur :

$$\frac{T}{16} a^2.$$

En substituant cela dans les équations (25) pour q on obtient :

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= i r_1 q_1 - i d_2 q_2 - i \frac{n}{16} q_1 a_1^2 \\ q_2 &= i r_2 q_2 - i d_1 q_1 - i \frac{n}{16} q_2 a_2^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

où r_1 et r_2 ne renferment donc plus les réductions à l'amplitude zéro. On trouve maintenant pour P l'équation :

$$P' - i d_2 P^2 - 2 i \Delta_r P + i d_1 + \frac{i n}{16} P (a_2^2 - a_1^2) = 0 \dots (31)$$

Cette équation n'est pas intégrable. On ne peut déduire que des formules approximatives pour quelques cas spéciaux.

Une étude complète de la marche du phénomène est donc difficile et compliquée. Nous y renoncerons en nous contentant de poursuivre le but essentiel de rechercher, s'il y a une valeur de P qui reste constante ou presque constante pendant une longue durée.

Dans le paragraphe précédent a été démontrée que si la réduction à l'amplitude zéro est négligeable, il y en a deux, à savoir (form. 28) :

$$P = R_a, \text{ c'est à dire } q_2 - q_1 = 0, \frac{a}{a_1} = \frac{\Delta - \Delta_r}{d_2}$$

$$P = R_b, \text{ c'est à dire } q_2 - q_1 = \pi, \frac{a_2}{a_1} = \frac{\Delta + \Delta_r}{d_2}.$$

dont la seconde est préférable pour l'application de la méthode du § 5, comme nous l'avons remarqué page 19.

Nous supposons maintenant que la modification du phénomène, causée par la réduction à l'amplitude zéro soit petite, de sorte que les valeurs les plus favorables de P ne diffèrent que peu de ces valeurs R_a et R_b . En nous bornant à la seconde, nous mettons :

$$P = L + R_b \quad (32 A)$$

et nous supposons L petit.

En substituant cela dans (31) on a :

$$L' - i d_2 L^2 + 2 i \Delta L + \frac{i n}{16} P (a_2^2 - a_1^2) = 0.$$

Nous négligerons les carrés de L et dans le dernier terme nous mettrons :

$$(a_2^2 - a_1^2) = (a_2^2 - a_1^2)_0 e^{-2kt} .$$

où $(a_2^2 - a_1^2)_0$ est la valeur initiale de $(a_2^2 - a_1^2)$.

On voit aisément que cette hypothèse est acceptable, si L est petit, puisqu'alors $\varphi_2 - \varphi_1$ est presque égal à π , de sorte que la perturbation des amplitudes par l'influence mutuelle des pendules est négligeable (form. 19 C) et que les amplitudes décroissent par conséquent avec leur coefficient d'amortissement ordinaire.

En dernier lieu nous remplaçons P dans le dernier terme par une valeur moyenne constante et réelle $-\dot{p}_m$.

Nous obtenons :

$$L' + 2i\Delta L - i\frac{n}{16}(a_2^2 - a_1^2)_0 \dot{p}_m e^{-2kt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (32 C)$$

Cette équation est intégrable; la solution peut être donnée sous la forme :

$$L = (L_0 - A) e^{-2i\Delta t} + A e^{-2kt} \quad . \quad . \quad . \quad (33 A)$$

où

$$A = \frac{n\dot{p}_m}{32(\Delta + ik)} (a_2^2 - a_1^2)_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33 B)$$

Le premier terme de L est un vecteur de longueur constante, tournant avec une vitesse angulaire 2Δ ; le second terme est un vecteur de direction constante, dont le module décroît dans la même proportion que le carré des amplitudes.

Il est impossible de choisir L_0 d'une telle façon que L soit constante. Il faut se contenter de chercher une valeur qui change le moins possible pendant la durée exigée. Nous avons exécuté cela pour une durée de huit heures, pour les valeurs de $(\tau_1 - \tau_2)$ et k appartenant aux pendules employés et pour différentes valeurs du coefficient de l'entraînement s . Le résultat a été que la valeur la plus favorable de L_0 est dans tous les cas environ égale à $0.6 A$. En exprimant A et L_0 dans les quantités réelles, on trouve ainsi approximativement :

$$\dot{p}_0 = 1 + 0.76 \left[\left(\frac{\Delta_n + \Delta_r}{s} \right) - 1 \right] \quad . \quad . \quad . \quad (34 A)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1)_0 = 12 - 0.18 s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34 B)$$

où $(\varphi_2 - \varphi_1)_0$ est exprimé en degrés et où Δ_n et Δ_r ont la signification donnée page 31. Nous avons facilité l'usage de ces formules en dressant deux tableaux qui sont communiqués dans le quatrième chapitre § 6.

Pour donner une idée des valeurs parcourues par L , nous avons construit dans la figure 14 la courbe décrite par L pendant une durée de huit heures pour les valeurs suivantes des constantes :

$$\begin{aligned} \tau_2 - \tau_1 &= 26.5 \cdot 10^{-7} \text{ sec.} \\ s &= 43 \quad \text{''} \quad \text{''} \\ \Delta &= 547 \quad \text{''} \\ k &= 522 \quad \text{''} \\ R_b &= -MO = 1.355. \end{aligned}$$

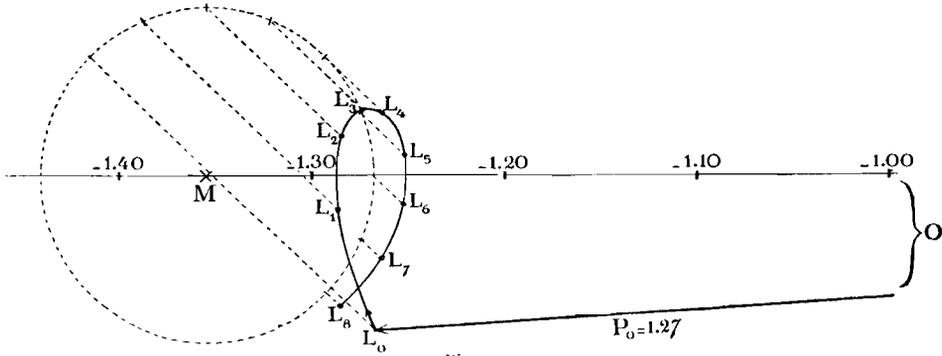


Fig. 14.

$ML_0, ML_1 \dots ML_8$ sont les valeurs de L après 0, 1... 8 heures. Avec les données employées la période se calcule à 16 heures.

On voit que le changement de P est petit: la variation du module de P , c'est à dire du rapport des amplitudes \hat{p} n'atteint pas 0.04 et la déviation maximale de $\varphi_2 - \varphi_1$ de π est $3^\circ, 5$.

Il faut remarquer encore que les résultats de ce paragraphe ne peuvent être considérés que comme une première approximation. Dans la pratique des observations nous avons eu des valeurs de L ayant des modules jusqu'à 0.2; les quantités négligées dans ce paragraphe de l'ordre de L^2 ont donc eu souvent des valeurs assez grandes.

Nous avons exécuté encore un calcul en tenant compte aussi de ces termes. La déduction étant très compliquée et ne fournissant pas de changement notable dans les valeurs les plus favorables pour \hat{p}_0 et $(\varphi_2 - \varphi_1)_0$ nous le passerons sous silence.

Il va sans dire, que le phénomène décrit dans ce paragraphe et dans le paragraphe précédent est perturbé quand il y a des mouvements du sol. La courbe que L décrit peut dévier alors considérablement, sans qu'on puisse en rien prédire, et il faut donc s'attendre dans ce cas à de plus grandes fluctuations de \hat{p} et de $\varphi_2 - \varphi_1$.

§ 12. La réduction à l'amplitude zéro pour une longue durée d'observation.

Si on ne fait pas d'observations intermédiaires pendant une observation de longue durée, on introduit une cause d'erreur, puisqu'on ne dispose pour le calcul des diverses réductions que des valeurs initiales et finales des quan-

tités dont on a besoin p. e. de la température, de la densité de l'air etc., et qu'en général la moyenne de ces deux valeurs ne coïncide pas avec la moyenne pendant toute la durée.

Dans le § 6 du quatrième chapitre nous donnerons une évaluation de ces erreurs.

Pour la réduction à l'amplitude zéro on peut éviter cette erreur, puisqu'on sait la loi suivant laquelle l'amplitude varie, de sorte qu'on est à même de déterminer la valeur moyenne de cette réduction. Nous en déduirons la formule dans ce paragraphe.

Quand il y a des mouvements du sol, la variation de l'amplitude est perturbée, ce qui entraîne de nouveau une erreur. Nous en déterminerons la valeur moyenne à l'aide des formules du § 8. Il va sans dire que cette erreur aussi bien que celles mentionnées plus haut se laisse écarter en faisant des observations intermédiaires. Quant aux observations de longue durée exécutées dans les Pays-Bas, pendant celles de l'après-midi on a toujours fait des observations intermédiaires, mais on a cru pouvoir s'en dispenser pendant les observations de la nuit.

La réduction à l'amplitude zéro est donnée par la formule:

$$\delta \tau = \frac{\tau}{16} a^2$$

donc pour une longue durée t :

$$\delta \tau = \frac{\tau}{16t} \int_0^t a^2 dt .$$

L'intégrale n'est calculable que si on sait comment a est fonction de t . Examinons d'abord le cas le plus simple:

I. Pendule oscillant seul.

La fonction en question est alors:

$$a = a_0 e^{-kt} (35)$$

et on trouve:

$$\delta \tau = \frac{\tau}{16} \frac{(a_0^2 - a_1^2)}{2 kt}$$

ou

$$\delta \tau = \frac{\tau}{32} \frac{(a_0^2 - a_1^2)}{(\lg a_0 - \lg a_1)} (36 A)$$

Cette formule se laisse appliquer facilement si on fait des tableaux des valeurs de:

$$\frac{\tau a^2}{32} \text{ et } \lg a .$$

Une formule plus commode encore se trouve en développant en série. En exprimant le résultat dans les quantités:

$$a_m = \frac{a_0 + a_1}{2}$$

$$\delta_a = a_0 - a_1$$

on obtient :

$$\delta\tau = \frac{\tau}{16} a_m^2 - \frac{\tau}{192} \delta a^2 - \frac{\tau}{2880} \frac{\delta^2 t}{a_m^2} \dots \dots \dots (36B)$$

Le dernier terme est négligeable dans la pratique, et on ne retient donc que les deux premiers termes pour le calcul desquelles on peut faire deux tableaux donnant les quantités :

$$\frac{\tau}{16} a^2 \text{ et } \frac{\tau}{192} a^2.$$

Pour les observations de courte durée le premier terme suffit.

Quand il y a des mouvements du sol, a est perturbé, c'est à dire que les formules (35) et (36) ne sont plus justes. La perturbation étant inconnue, on ne peut déterminer l'erreur même, mais en partant de la supposition du § 8 concernant l'irrégularité des mouvements du sol, on en peut déduire une valeur moyenne.

Les formules 12 B et C du § 8 fournissent la relation :

$$[\delta a'] = \frac{a n t}{T} [\delta \tau_t]$$

où $[\delta a']$ signifie la perturbation totale de a à la fin de la durée t et $[\delta \tau_t]$ la perturbation moyenne de τ pendant ce temps. Nous désignerons maintenant la moyenne de tous les δa pendant la durée t par δa_m et la valeur moyenne de cette quantité par $[\delta a_m]$.

On peut prouver qu'il existe le rapport suivant :

$$[\delta a_m] = \frac{1}{\sqrt{6}} [\delta a']$$

donc

$$[\delta a_m] = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{a n t}{\tau} [\delta \tau_t].$$

On reconnaît alors aisément que l'erreur moyenne de $\delta\tau$ dans les formules (36) peut être représentée approximativement par :

$$[\delta (\delta \tau)'] = \frac{\tau}{8} a [\delta a_m] = \frac{1}{8\sqrt{6}} a^2 n t [\delta \tau_t] \dots \dots \dots (37)$$

où a est l'amplitude moyenne pendant la durée t .

La formule (37) donne une idée de la valeur moyenne de cette influence indirecte des mouvements du sol. Quand t est huit heures et a a la valeur ordinaire de l'amplitude, le facteur de $\delta\tau$ dans la membre droite s'élève à environ 0.5, c'est à dire que pour cette durée d'observation l'erreur atteint la moitié de la perturbation directe $\delta\tau$ causée par les mouvements du sol.

II. Supposons maintenant qu'on a deux pendules oscillant ensemble.

A part de la décroissance suivant la formule (35) les amplitudes seront sujettes à un changement par l'influence mutuelle des pendules. Le changement de $(a_1^2 + a_2^2)$ par cette seconde cause se trouve être nul, puisqu'en vertu des formules (23 C) et (23 D) on a :

$$\begin{aligned} \delta (a_1^2 + a_2^2) &= 2 a_1 \delta a_1 + 2 a_2 \delta a_2 = \\ &= 4 n s [a_1 a_2 \sin (q_2 - q_1) - a_2 a_1 \sin (q_2 - q_1)] = 0. \end{aligned}$$

On obtient le même résultat en remarquant que a^2 est proportionnelle à la force vive du pendule et que la somme des forces vives des deux pendules ne change pas par l'influence mutuelle.

La réduction à l'amplitude zéro de la moyenne des deux durées d'oscillation ne subit donc aucune modification par cette influence.

On reconnaît aisément que dans le cas que les pendules oscillent d'une telle manière que le rapport des amplitudes p est constant, cette remarque s'applique aussi à la réduction à l'amplitude zéro de chaque pendule à part. Les observations de longue durée ayant été faites toujours sous ces conditions, nous n'avons donc pas eu besoin d'en tenir compte, de sorte que nous avons pu calculer les réductions à l'amplitude zéro par moyen de la formule ordinaire (36).

Nous examinerons maintenant de nouveau les erreurs causées par les mouvements du sol. Puisque les deux points de suspension subissent les mêmes translations, les perturbations des deux amplitudes ne sont pas indépendantes. Les erreurs des valeurs que les formules (36) donnent pour les deux réductions à l'amplitude zéro ne le sont donc non plus, de sorte qu'on ne peut trouver l'erreur moyenne de la réduction $\delta \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right)$ de la moyenne des deux durées d'oscillation en divisant par $\sqrt{2}$ la valeur (37) pour l'erreur moyenne de la réduction d'un pendule oscillant seul. Afin de déterminer cette erreur moyenne il faut se servir de la formule (15 D) du § 8 qui donne la valeur moyenne de $\delta (a_1^2 + a_2^2)$ en tenant compte de l'interdépendance des δa . En suivant un raisonnement analogue à celui qui a mené à la formule (37) on trouve :

$$\left[\delta \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right] = \frac{1}{8} \sqrt{6} a_1^2 n t \times \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1 + 2p \cos (q_2 - q_1)} \times [\delta \tau] \quad (38)$$

où $\delta \tau$ est la perturbation de τ par les mouvements du sol d'un pendule oscillant seul avec une amplitude a_1 .

La formule (38) se distingue de la formule (37) par le facteur :

$$\frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1 + 2p \cos (q_2 - q_1)}$$

Ce facteur devient nul pour $p = 1$ et $(q_2 - q_1) = \pi$, c'est à dire que par l'application de la première méthode du § 5 on n'élimine pas seulement l'effet direct des mouvements du sol mais aussi l'effet indirect considéré.

N'ayant pu appliquer cette méthode pour les observations de grande durée, nous avons dû employer d'autres valeurs de p à savoir 1.25 à 1.35, tandis que $(q_2 - q_1)$ ne différait pas beaucoup de π . Cela donne au facteur en question une valeur de 0.10 à 0.15, c'est à dire que l'erreur dans la moyenne

des deux durées d'oscillation ne dépasse pas 0.05 à 0.04 fois la perturbation directe par les mouvements du sol pour un pendule oscillant seul.

Nous faisons remarquer encore une fois que l'erreur ne s'est produite que dans les observations de longue durée pendant la nuit; pour celles exécutées pendant l'après-midi on l'a évitée en faisant des observations intermédiaires des amplitudes.

§ 13. La détermination du coefficient de l'entraînement.

Nous faisons suivre ici un examen succinct de différentes méthodes pour la détermination de s .

I. *La méthode statique.*

On mesure le déplacement produit par un effort horizontal connu, appliqué au support au point de suspension du pendule. On en calcule la quantité γ de la formule 18A. En supposant que l'influence de l'inertie des masses ébranlées du support soit négligeable, ce qui est bien permis dans la plupart des cas, on a

$$\gamma = \lambda$$

et on peut calculer s au moyen de la formule (19A).

La méthode a l'avantage de n'être pas sujette à des perturbations par les mouvements du sol.

Elle a deux inconvénients:

A. Il est difficile de s'assurer à chaque station un point d'appui fixe pour l'appareil servant à la mesure du déplacement.

B. Il faut employer une assez grande force de plusieurs K.G. pour donner au support un déplacement qui se mesure avec la précision demandée de 1% sans exiger des appareils compliqués. Il faut donc se demander si l'élasticité du support est assez complète pour que le coefficient de flexion soit le même pour ces efforts-ci, que pour les efforts exercés par les pendules qui sont quelques centaines de fois plus petits. Cette hypothèse est d'autant plus discutable, que ce n'est pas seulement le support qui se déforme, mais que le point d'appui y participe aussi.

Nous croyons qu'il est probable que c'est à cette cause qu'il faudra attribuer le fait qu'on a cru pouvoir constater autrefois une différence systématique entre la valeur de s donnée par cette méthode et celle fournie par la méthode à deux pendules que nous mentionnerons plus bas.¹⁾ D'ailleurs cette différence systématique n'a pas été confirmée par la longue série d'expériences faite à cette fin par le prof. L. HAASEMANN.

On peut éviter le désavantage en n'appliquant que des forces de la

1) Voir: Observations de Pendule, Mém. du Dép. de la G. XV. page 18.

même grandeur que les efforts des pendules et en recourant à une mesure au moyen de franges d'interférence pour atteindre la précision voulue, mais la méthode nécessiterait alors des appareils encombrants et coûteux.

II. *La méthode dynamique.*

On mesure le déplacement a_s du point de suspension, pendant l'oscillation du pendule. En combinant (5 Aa) avec la formule au bas de page 22 qui exprime $\delta q'$ dans la coordonnée y_0 du point de suspension, on déduit la formule suivante pour s :

$$s = \delta \tau = \frac{1}{2 a l} \int_0^{\tau} y_0 \cos n t dt = \frac{a_s T}{2 a l}.$$

Cette méthode a les mêmes inconvénients que la méthode précédente :

A. Il est difficile de trouver un point d'appui fixe pour l'appareil de mesure.

B. Les déplacements sont si petits (pour l'appareil de DEFFORGES, avec une amplitude de $40'$, le déplacement est de 0.1μ) que la mesure avec la précision voulue exige des appareils compliqués, ¹⁾

III. *La méthode des poussées périodiques.*

On mesure l'amplitude qu'un pendule en repos reçoit sous l'action d'un effort, appliqué horizontalement au support et variant périodiquement entre zéro et un maximum connu. La période doit être égale ou à peu près égale à celle du pendule.

En éliminant λ des formules (19 A) et (18 B) et en remarquant que a est le module de $\delta q'$ on trouve la formule :

$$s = \frac{\pi m h}{2 U} \frac{a}{t} \dots \dots \dots (39 A)$$

où U est le module de $\int_0^t L e^{-i(n t + \pi)} dt$ et L est l'effort appliqué au support. S est donc connu, si L est connu, c'est à dire si la courbe de L est connue.

Pour éviter des appareils compliqués, on peut exécuter les poussées à la main. On intercale alors un dynamomètre pour contrôler la force appliquée en faisant osciller l'aiguille périodiquement entre zéro et un maximum donné.

Nous supposons, qu'on en a acquis une telle habitude, que la courbe de L est la même pour toutes les périodes. On n'en connaît maintenant que le maximum et le minimum, mais on sait que le module de

¹⁾ En faisant la mesure au moyen de franges d'interférence la méthode a été appliquée en France par le C^t DEFFORGES et dans les Etats Unis par W. H. BURGER : Observations de Pendule, Mémorial du Depot Général de la Guerre XV.

The measurement of the flexure of pendulum supports with the Interferometre, Coast and Geodetic Survey Report 1910.

$$\frac{1}{2\tau_s} \int_t^{t+2\tau_s} L e^{-i(n_s t + \kappa)} dt$$

(où $2\tau_s$ est la période de L et $n_s = \frac{\pi}{\tau_s}$)

est indépendante de t . Nous la désignons par C . Quand les périodes de l'effort et du pendule sont égales, c'est à dire que $\tau_s = \tau$, on a :

$$U = C \dots \dots \dots (39 B)$$

Quand les périodes diffèrent un peu, on a en remarquant que $(n_s - n)$ est petit :

$$\int_t^{t+2\tau_s} L e^{-i(n t + \kappa)} dt = e^{i(n_s - n)t} \int_t^{t+2\tau_s} L e^{-i(n_s t + \kappa)} dt = 2\tau_s C e^{i(n_s - n)t}$$

En intégrant pour la durée totale t , on trouve sans difficulté :

$$U = C \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots (39 C)$$

où
$$\alpha = \frac{n_s - n}{2} t$$

Si $n_s - n$ est petit, l'angle α est petit, c'est à dire que le facteur

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

est à peu près égal à 1 ; la différence augmente avec t^2 .

La relation de U et C étant maintenant connue, il nous reste encore de déterminer C .

On obtient une première approximation en supposant que la courbe de L est sinusoïdale :

$$L = \frac{1}{2} K (1 + \sin n_s t)$$

où K est le maximum connu.

Cette supposition donne :

$$C = \frac{1}{4} K \dots \dots \dots (40)$$

Il est cependant préférable de déterminer C par des expériences spéciales. La plus simple manière est d'appliquer la méthode à une station où on a déjà déterminé s par une autre méthode.

La méthode des poussées périodiques a l'avantage de n'exiger qu'un simple dynamomètre, et de ne prendre que quelques minutes. En raison de cette courte durée, elle est à peu près indépendante des mouvements du sol.

La méthode a deux inconvénients, dont le premier coïncide avec le premier de la méthode statique :

A. Il faut appliquer une assez grande force, c'est à dire qu'on mesure le coefficient de flexion pour des efforts beaucoup plus grands que l'effort exercé par le pendule.

B. Il faut avoir une grande habitude pour être sûr que la courbe de L est vraiment la même pour les différentes périodes.

Il est donc bien nécessaire de contrôler la constance de cette courbe.

On peut le faire en répétant la détermination de s plusieurs fois à chaque station; ce qui est facile à faire à cause de la courte durée des observations.

En dehors de cela il faut répéter de temps en temps la détermination de C pour s'assurer que la courbe de L n'a pas subi un changement systématique.

IV. *La méthode des deux pendules.*

En profitant des formules (22) ou (23) on peut déterminer s en mesurant l'influence mutuelle de deux pendules, oscillant ensemble sur le même support dans le même plan vertical.

Nous considérerons plus tard les différentes méthodes d'observation qu'on peut appliquer.

La méthode a l'avantage de n'exiger aucun appareil auxiliaire et d'être indépendante ou à peu près indépendante des suppositions regardant les propriétés élastiques du support. On reconnaît cela aisément en se rendant compte que la formule pour la méthode ordinaire à deux pendules a été déduite page 14 sans faire aucune supposition sur les propriétés élastiques du support. En général c'est seulement nécessaire de supposer que le coefficient de flexion est le même pour les efforts qui agissent sur le support pendant les observations de pendule même et pendant la détermination de s . Cette condition est donc remplie si on employe dans les deux cas des amplitudes qui ne diffèrent que peu.

La méthode a l'inconvénient, comme nous le verrons encore plus tard, qu'elle subit des perturbations très perceptibles par les mouvements du sol.

Choix de la méthode.

Appareil Defforges.

L'appareil DEFFORGES ne permet pas de faire osciller deux pendules à la fois. Nous avons donc le choix entre les trois premières méthodes. En tenant compte des différentes considérations, nous avons choisi la troisième, c'est à dire la méthode des poussées périodiques: Elle n'exige ni des appareils compliqués, ni des points d'appui fixes qui sont difficiles à se procurer à chaque station, et elle donne des résultats excellents.

Nous avons exécuté la méthode en faisant les poussées rythmées par le bruit de la pendule, dont la période différait naturellement un peu de celle du

pendule afin de pouvoir obtenir des coïncidences. Il fallait donc appliquer la formule (39 C au lieu de (39 B).

Nous avons fait la détermination de C pendant notre séjour à Potsdam en 1913, puisque nous avons là les moyens de déterminer s par la méthode statique après l'avoir fait par la méthode des poussées. Pour la mesure du déplacement du support nous nous sommes servi du petit instrument à glace tournante de Nagaoka, qui donne déjà des résultats satisfaisants en n'appliquant que des forces de 1 K.G. ¹⁾

L'observation donnait une valeur de C , qui était 1.13 plus grande que la valeur donnée par la formule (40).

Ayant suspendu peu après les observations avec l'appareil DEFFORGES, nous n'avons plus répété la détermination de C .

Appareil von Sterneck.

Pendant les observations de pendule l'appareil VON STERNECK est fermé par une cloche en métal. Des observations spéciales ayant démontré que le coefficient de l'entraînement augmente en l'enlevant de plusieurs dix millionnièmes de seconde, il fallait se résoudre à faire la détermination de ce coefficient à cloche fermée.

Cette circonstance rendait impossible l'application d'une des trois premières méthodes, puisqu'on ne peut ni appliquer une force aux points de suspension, ni en mesurer les déplacements.

Il fallait donc choisir la méthode à deux pendules, qui d'ailleurs a des avantages très importants. Nous faisons suivre ici un aperçu des différentes méthodes d'observation dont on peut encore se servir.

Méthodes à deux pendules.

On peut déterminer s en mesurant la perturbation des amplitudes ou celle des durées d'oscillation.

A. Méthodes à mesure d'amplitude.

I. La méthode ordinaire.

On mesure l'amplitude qu'un pendule en repos reçoit par l'influence exercée par le second pendule.

Nous avons déjà trouvé la formule (7 B): ²⁾

$$s = \frac{T}{n} \frac{p}{t} \dots \dots \dots (41 A)$$

1) Voir e.a.: Bestimmung der Int. der Schwerkraft in Hannover, Kon. preuss. Geod. Inst. N.F. 41, page 154.

2) La même formule se déduit des équations (23 D) en remarquant qu'au début $(\varphi_2 - \varphi_1)$ doit être égal à $\frac{\pi}{2}$, puisqu'autrement $\delta \tau_2$ deviendrait infini (23 B).

où p est l'amplitude du pendule qui était en repos, divisée par l'amplitude de l'autre.

Nous avons négligé l'amortissement des amplitudes. Quand les coefficients d'amortissement sont égales cette omission est permise; puisqu'alors le rapport p n'est pas influencé par l'amortissement. Quand les coefficients diffèrent, il faut en tenir compte, et on trouve la formule:

$$s = \frac{T}{n} \frac{p}{t} \left[1 + \left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) t + \dots \right] \dots (41 B)$$

Il est avantageux de se servir d'un second pendule spécial avec une masse plus grande que celle du premier, puisqu'alors l'amplitude reçue par celui-ci est plus grande de sorte que les erreurs d'observation ont moins d'influence.

En ce cas on trouve au moyen de (22 D) la formule:

$$s = \frac{T}{n} \frac{p}{\omega^2 t} \dots \dots \dots (41 C)$$

N'ayant pas de pendule spécial à notre disposition, nous n'avons pas pu profiter de cette modification.

La méthode décrite est simple et ne prend que vingt minutes environ. Le seul inconvénient est qu'il est un peu difficile de mettre le pendule en repos au début, surtout s'il faut le faire à cloche fermée.

On peut éviter cette difficulté en appliquant une méthode modifiée:

II. Deuxième Méthode.

On fait osciller les deux pendules avec une différence de phase d'environ $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

On mesure les amplitudes au début et à la fin et on détermine $(\varphi_2 - \varphi_1)$ par des observations de coïncidences au moment médian.

En supposant que les coefficients d'amortissement sont égaux, on peut les éliminer en déduisant de (23 C) et (23 D) une formule ne contenant que

$$\frac{a_2}{a_1} = p: \quad s = - \frac{T}{n} \frac{p'}{(\rho^2 + 1)} \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi_1).$$

On peut encore simplifier en mettant:

$$p = \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (42 Aa)$$

ce qui donne:

$$s = - \frac{T}{n} x' \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi_1) \dots \dots \dots (42 Ab)$$

Le membre droit est connu par les observations.

Quand les coefficients d'amortissement diffèrent, on obtient la formule:

$$s = - \frac{T}{n} \left[x' + \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \sin 2\alpha \right] \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi_1) \dots (42 B)$$

Pour les pendules de masse différente, on trouve la modification suivante:

Posant:
$$\frac{a_2}{\omega a_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

on a
$$s = \frac{T}{n \alpha} \alpha' \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi_1) \dots \dots \dots (42 C)$$

Pour que l'erreur moyenne de s soit le plus petit possible, il faut que α_1 soit grand et que α_2 soit égal à la limite inférieure, au dessous de laquelle on ne peut aller sans augmenter trop l'erreur d'observation des coïncidences. Ceci est évident puisqu'ainsi le changement α' devient plus grand, c'est à dire qu'une erreur d'observation a moins d'influence.

On voit aisément qu'on peut encore augmenter la précision en employant pour le premier pendule c'est à dire pour celui qui a une grande amplitude, un pendule spécial à masse plus grande.

La méthode¹⁾ a l'avantage d'éviter la difficulté de mettre un des pendules en repos, mais si on veut obtenir la même précision du résultat elle prend un peu plus de temps que la méthode précédente.

III. Dans „Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam“ de prof. Dr. F. KÜHNEN et prof. Dr. PH. FURTWÄNGLER on fait encore mention d'une autre méthode pour déterminer s , qui repose sur la théorie développée dans le § 10 pour les observations de longue durée. Il faut disposer d'un second pendule dont le coefficient d'amortissement diffère beaucoup de celui du pendule ordinaire. A Potsdam on a employé un petit poids au bout d'un fil. On reconnaît aisément qu' alors les amplitudes obtiendrons après une longue durée un rapport à peu près fixe qui est indépendant de la situation du début, puisque toute situation s'approche de la situation spéciale stable avec une vitesse qui est plus grande à mesure que $(k_2 - k_1)$ est plus grand (page 29 et 30). Il n'est pas nécessaire de mettre le second pendule en repos au début, comme on l'a fait à Potsdam.

Le rapport obtenu sera donc égal au module de R_s ou R_δ et en la mesurant on peut déduire s de la formule (28 B) ou (28 C), si on connaît toutefois les quantités $(T_2 - T_1)$ et $(k_2 - k_1)$. Il faut donc faire des observations spéciales pour déterminer ces quantités. A cause de cela et de sa durée considérable la méthode a peu d'intérêt pour les observations de voyage.

B. Méthodes à mesure de durée d'oscillation.

I. Première Méthode. 1)

1) Voir „Il supporto bipendolare Mioni“ — G. LORENZONI e Dott. G. SILVA.

Den Danske Gradmaaling Hefte n^o. 11, Konstant bestemmelser ved relative Pendulmaalingen — V. H. O. MADSEN.

Ueber die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage von Dr. PH. FURTWÄNGLER, Akad. der Wiss. Berlin 1902 XII.

On fait deux observations, l'une en faisant :

$$(q_2 - q_1) = \pi \quad a_2 = a_1$$

et l'autre en faisant :

$$(q_2 - q_1) = 0 \quad a_2 = a_1$$

Nous désignons les valeurs de la première observation par ', et celles qui ont trait à la seconde par ''.

Si les conditions données étaient réalisées exactement, on aurait suivant les formules (23 A) et (23 B) :

$$\delta \tau_1'' - \delta \tau_1' = 2s$$

$$\delta \tau_2'' - \delta \tau_2' = 2s$$

ou bien :

$$\left. \begin{aligned} T_1'' - T_1' &= 2s \\ T_2'' - T_2' &= 2s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43 A)$$

où les T signifient les durées d'oscillation observées après l'application de toutes les corrections sauf celle de l'entraînement du support.

Les conditions ne se réalisant jamais exactement, il est préférable d'employer les formules plus générales :

$$\left. \begin{aligned} T_1'' - T_1' &= [p'' \cos \beta'' + p' \cos \beta'] s \\ T_2'' - T_2' &= \left[\frac{1}{p''} \cos \beta'' + \frac{1}{p'} \cos \beta' \right] s \end{aligned} \right\} \dots \dots (43 B)$$

où β' et β'' sont les déviations de $(q_2 - q_1)$ des valeurs π resp. 0.

Quand les pendules n'ont pas le même poids il faut multiplier le membre droit de la première formule par ω^2 .

La méthode a deux inconvénients :

1^o. Elle exige plus de temps que les précédentes, puisque, si on veut obtenir la même précision, chacune des observations prend au moins une heure.

2^o. Il faut appliquer à T toutes les corrections sauf celle de l'entraînement. Cela causera des erreurs de T à côté de celles provenant des observations même de T . La plupart de ces erreurs sont petites mais l'erreur résultant de la connaissance imparfaite de la marche du chronomètre ou de la pendule peut être assez considérable. A moins que la marche ne soit exceptionnellement régulière, elle causera même des erreurs très graves dans le résultat s .

On peut éviter cette erreur en appliquant la deuxième méthode.

II. Deuxième méthode.

On fait une observation avec une différence de phase d'environ π et des amplitudes différant autant que possible.

Les formules (23 A) et (23 B) fournissent la formule suivante pour le calcul de s :

$$(T_2 - T_1) = (\tau_2 - \tau_1) - s \left(p - \frac{1}{p} \right) \cos (q_2 - q_1) \dots (44)$$

où $(T_2 - T_1)$ est la différence observée après l'application des autres corrections, tandis que $(\tau_2 - \tau_1)$ est la différence non-perturbée.

Quand on connaît $(\tau_2 - \tau_1)$ par d'autres observations on possède toutes les quantités de (44) en dehors de s , donc s est calculable.

On reconnaît aisément que si les amplitudes diffèrent beaucoup, le facteur de s est plus grand qu'autrement, c'est à dire que l'erreur moyenne du résultat s est plus petit.

Quand on ne connaît pas $(\tau_2 - \tau_1)$, il faut faire une deuxième observation, en échangeant les valeurs des amplitudes, de sorte que, si de nouveau nous désignons les valeurs de la première observation par ' et celles de la seconde par '', p'' a environ la valeur réciproque de p' .

On a :

$$(T_2 - T_1)'' - (T_2 - T_1)' = \left[\left(p' - \frac{1}{p'} \right) \cos (q_2 - q_1)' - \left(p'' - \frac{1}{p''} \right) \cos (q_2 - q_1)'' \right] s. \quad (45)$$

On peut aussi faire la seconde observation en retenant les valeurs précédentes pour les amplitudes de sorte que p'' est environ égal à p' mais en faisant $(q_2 - q_1)$ environ égal à zéro.

Dans les deux cas le facteur de s dans la formule (45) a une valeur aussi grande que possible.

En le cas où les pendules ont un poids différent, on déduit de (22 A) et (22 B) des formules analogues à (44) et (45). Nous n'y entrerons pas.

En comparaison de la méthode précédente, celle-ci a l'avantage de ne demander que les corrections de la différence $(T_2 - T_1)$ qui se calculent beaucoup plus facilement, que celles de T_2 ou T_1 . La plupart des corrections, entre autres celle de la marche du chronomètre sont égales pour les deux pendules, c'est à dire que la différence $T_2 - T_1$ en est indépendante.

L'erreur moyenne de $(T_2 - T_1)$ est donc beaucoup plus petite que celle de T_2 et T_1 et par conséquent l'erreur moyenne du résultat s est plus petite que celle donnée par la méthode précédente.

Nous examinerons maintenant l'influence des perturbations par les mouvements du sol sur le résultat s des différentes méthodes à deux pendules.

On peut en dire de prime abord qu'elle est de même ordre que la perturbation de la durée d'oscillation d'un pendule oscillant seul, puisque dans les deux cas elle est définie par le rapport des mouvements du support causés par les mouvements du sol et ceux causés par les efforts des pendules.

Cette conclusion se confirme en étudiant de plus près l'erreur moyenne de s à l'aide des formules (12) et (15) du § 8. Nous faisons suivre ici le résultat :

Quand les pendules ont un poids égal, l'erreur moyenne $[m_t]$ du résultat s obtenu par une observation durant un temps t est :

$$\left. \begin{aligned} \text{Méthode } A_I \quad [m_t] &= \frac{G T}{a_2 g \sqrt{2t}} \\ A_{II} \quad " &= \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \\ B_I \text{ 1)} \quad " &= \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \\ B_{II} \text{ 1)} \quad " &= \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \end{aligned} \right\} \dots (46 A)$$

et suivant la formule (10 A) la perturbation de la durée d'oscillation d'un pendule oscillant seul avec une amplitude a_s est :

$$[\delta \tau_t] = \frac{G T}{a_s g \sqrt{2t}}.$$

La remarque est donc confirmée : en employant la méthode ordinaire (A_I) il y a une erreur moyenne de s égale à la perturbation moyenne de la durée d'oscillation d'un pendule oscillant seul pendant une même durée t avec une même amplitude et pour les autres méthodes l'erreur moyenne n'en diffère pas beaucoup.

Il s'ensuit en outre des formules 46 A qu'il est avantageux d'employer de grandes amplitudes pour la détermination de s .

Quand le poids des pendules est différent, les formules trouvées sont un peu plus compliquées :

$$\left. \begin{aligned} \text{Méthode } A_I \quad [m_t] &= \frac{G T}{\omega^2 a_2 g \sqrt{2t}} \\ A_{II} \quad " &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(a_1^2 + \omega^2 a_2^2)} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \\ B_I \quad " &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(a_1^2 + \omega^2 a_2^2)} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \\ B_{II} \quad " &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{(-a_1^2 + \omega^2 a_2^2)} \frac{G T}{g \sqrt{2t}} \end{aligned} \right\} \dots (46 B)$$

On peut en conclure que l'erreur moyenne devient un peu moindre en employant un pendule spécial plus lourd.

Choix de la méthode pour les observations en Hollande.

Puisqu'en appliquant les méthodes d'observation du § 5 nous n'avons besoin que d'une détermination superficielle de s , nous avons choisi la méthode

1) La durée de chacune des deux observations est donc supposée égale à $\frac{t}{2}$.

la plus simple, à savoir la méthode ordinaire à mesure d'amplitude (A_1). Les tournées de 1915 faisaient exception puisqu'alors nous ne disposions pas d'une aide, de sorte qu'il était difficile de bien effectuer la mise en repos; nous avons employé alors la méthode B_1 .

§ 14. **La déduction du résultat final T et de son erreur moyenne dans le cas où on a observé pendant plus d'une journée.**

A la plupart des stations nous avons observé pendant plusieurs jours consécutifs. En ce qui concerne le résultat principal nous aurions pu nous contenter de faire des déterminations de l'heure au commencement et à la fin, mais afin d'obtenir aussi des données pour la déduction de l'erreur moyenne, nous les avons fait de plus à des moments intermédiaires, à savoir à des intervalles de vingt-quatre heures. Ainsi chaque journée pour soi donne un résultat T .

Il faut remarquer toutefois que ces résultats ne sont pas indépendants puisque chaque détermination intermédiaire de l'heure sert au calcul des deux marches adjacentes. Le traitement d'un tel ensemble d'observations au moyen de la méthode des moindres carrés est compliqué par le fait qu'on ne sait pas d'avance l'erreur moyenne d'une détermination de l'heure puisque l'erreur moyenne des données fournies par l'Observatoire de Paris concernant les signaux radiotélégraphiques employés est inconnue. Par conséquent on ne sait pas le rapport du poids des déterminations de l'heure à celui des observations de pendule, de sorte qu'il faut retenir ce rapport comme inconnue dans le calcul. On trouve donc les résultats du calcul, c'est à dire T , l'erreur moyenne de T , de l'observation de pendule et de la détermination de l'heure, exprimés dans ce rapport inconnu.

Il s'ensuit qu'on a encore besoin d'autres données pour résoudre le problème. Nous verrons dans le cinquième chapitre qu'on peut obtenir ces données grâce à la possibilité de déterminer encore d'une autre manière l'erreur moyenne des observations de pendules. On trouve ainsi le rapport mentionné et substituant cela dans les résultats du calcul on obtient les valeurs désirées.

Le calcul suivant la méthode des moindres carrés a la même forme pour un grand nombre de stations. Nous pouvons donc abrégier le travail en donnant une fois pour toutes une solution générale algébrique, de sorte qu'on n'a qu'à y substituer les valeurs observées à une station particulière pour obtenir le résultat. Ces formules générales ont de plus l'avantage de donner une idée plus claire du problème, p. e. de l'influence du rapport mentionné sur la diminution de l'erreur moyenne du résultat final T par l'augmentation du nombre

de journées d'observation, de sorte qu'on peut mieux juger de la désirabilité d'augmenter ou de diminuer ce nombre.

Nous commencerons par le cas de six journées consécutives. Supposons que les déterminations journalières de l'heure aient donné les valeurs suivantes pour la marche du chronomètre :

$$g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_5 \ g_6.$$

Acceptons ces valeurs comme valeurs approximatives et désignons les valeurs réelles diminuées de ces valeurs approximatives par :

$$G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6.$$

Acceptons la valeur de la correction médiane du chronomètre c'est à dire celle donnée par la quatrième détermination de l'heure, comme valeur approximative de cette correction et désignons la valeur réelle diminuée de cette valeur approximative par

$$\Delta.$$

Désignons la valeur réelle de la durée d'oscillation (c'est à dire de la moyenne des quatre pendules) après l'application de toutes les corrections y compris celle de la marche du chronomètre par

$$T$$

et désignons les durées observées pendant les six jours, après l'application de toutes les corrections comme elles s'ensuivent des observations par :

$$t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5 \ t_6.$$

Pour la correction de la marche on a employé les valeurs approximatives $g_1, g_2 \dots g_6$. Les quantités $t_1, t_2 \dots t_6$ ont donc l'erreur moyenne d'une détermination d'une durée d'oscillation après l'application de toutes les corrections *sauf celle de la marche*, puisque cette correction a été déterminée avec les valeurs approximatives et non avec les valeurs les plus probables.

Les quantités :

$$G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6 \ \Delta \ \text{et} \ T$$

sont les inconnues du problème.

Le but principal de notre recherche est d'obtenir T et la valeur des erreurs moyennes des observations et de T .

Mettons que le poids des déterminations de l'heure soit $\frac{1}{2}$ et que le poids des durées d'oscillation corrigées $t_1 \dots t_6$ soit $\frac{\alpha}{2}$, c'est à dire que α est le rapport inconnu, mentionné plus haut. En désignant la constante par laquelle il faut multiplier la marche pour obtenir la correction de la durée d'oscillation par c , nous avons les équations suivantes pour les erreurs d'observation $x_1, x_2 \dots x_{13}$:

*Poids.**Equations des erreurs.*

$\frac{1}{2}$	$x_1 = 0 - \Delta + G_1 + G_2 + G_3$	}	déterminations de l'heure.
$\frac{1}{2}$	$x_2 = 0 - \Delta + G_2 + G_3$		
$\frac{1}{2}$	$x_3 = 0 - \Delta + G_3$		
$\frac{1}{2}$	$x_4 = 0 - \Delta$		
$\frac{1}{2}$	$x_5 = 0 - \Delta - G_4$		
$\frac{1}{2}$	$x_6 = 0 - \Delta - G_4 - G_5$		
$\frac{1}{2}$	$x_7 = 0 - \Delta - G_4 - G_5 - G_6$		
$\frac{\alpha}{2}$	$x_8 = t_1 + cG_1 - T$	}	observations de pendule.
$\frac{\alpha}{2}$	$x_9 = t_2 + cG_2 - T$		
$\frac{\alpha}{2}$	$x_{10} = t_3 + cG_3 - T$		
$\frac{\alpha}{2}$	$x_{11} = t_4 + cG_4 - T$		
$\frac{\alpha}{2}$	$x_{12} = t_5 + cG_5 - T$		
$\frac{\alpha}{2}$	$x_{13} = t_6 + cG_6 - T$		

On peut simplifier considérablement en additionnant et en soustrayant les équations deux à deux.

Nous divisons en même temps par deux et nous introduisons au lieu des $G_1 \dots G_6$ les nouvelles inconnues¹⁾:

$$G_{16} = \frac{G_1 + G_6}{2} \qquad \gamma_{16} = \frac{G_6 - G_1}{2}$$

$$G_{25} = \frac{G_2 + G_5}{2} \qquad \gamma_{25} = \frac{G_5 - G_2}{2}$$

$$G_{34} = \frac{G_3 + G_4}{2} \qquad \gamma_{34} = \frac{G_4 - G_3}{2}$$

En nommant:

$$\frac{t_1 + t_6}{2} = t_{16} \qquad \frac{t_6 - t_1}{2} = \tau_{16}$$

$$\frac{t_2 + t_5}{2} = t_{25} \qquad \frac{t_5 - t_2}{2} = \tau_{25}$$

$$\frac{t_3 + t_4}{2} = t_{34} \qquad \frac{t_4 - t_3}{2} = \tau_{34}$$

1) Nous démontrerons plus loin que ce procédé est permis.

nous obtenons ainsi les équations suivantes:

	<i>Poids.</i>	<i>équations nouvelles des erreurs.</i>
$\frac{1}{2}$ (7 ^e éq. — 1 ^e éq.):	1	$x_1' = 0 \quad - G_{16} - G_{25} - G_{34}$
$\frac{1}{2}$ (6 ^e éq. — 2 ^e éq.):	1	$x_2' = 0 \quad \quad \quad - G_{25} - G_{34}$
$\frac{1}{2}$ (5 ^e éq. — 3 ^e éq.):	1	$x_3' = 0 \quad \quad \quad - G_{34}$
$\frac{1}{2}$ (8 ^e éq. + 13 ^e éq.):	α	$x_4' = t_{16} - T + cG_{16}$
$\frac{1}{2}$ (9 ^e éq. + 12 ^e éq.):	x	$x_5' = t_{25} - T \quad \quad + cG_{25}$
$\frac{1}{2}$ (10 ^e éq. + 11 ^e éq.):	α	$x_6' = t_{34} - T \quad \quad \quad + cG_{34}$
$\frac{1}{2}$ (7 ^e éq. + 1 ^e éq.):	1	$x_1'' = 0 - \Delta - \gamma_{16} - \gamma_{25} - \gamma_{34}$
$\frac{1}{2}$ (6 ^e éq. + 2 ^e éq.):	1	$x_2'' = 0 - \Delta \quad \quad \quad - \gamma_{25} - \gamma_{34}$
$\frac{1}{2}$ (5 ^e éq. + 3 ^e éq.):	1	$x_3'' = 0 - \Delta \quad \quad \quad - \gamma_{34}$
4 ^e éq. :	$\frac{1}{2}$	$x_4'' = 0 - \Delta$
$\frac{1}{2}$ (13 ^e éq. — 8 ^e éq.):	α	$x_5'' = \tau_{16} \quad \quad + c\gamma_{16}$
$\frac{1}{2}$ (12 ^e éq. — 9 ^e éq.):	α	$x_6'' = \tau_{25} \quad \quad \quad + c\gamma_{25}$
$\frac{1}{2}$ (11 ^e éq. — 10 ^e éq.):	α	$x_7'' = \tau_{34} \quad \quad \quad + c\gamma_{34}$

On remarque tout de suite que le nouveau système d'équations se décompose en deux groupes, dont la première ne contient que les inconnues:

$$T \quad G_{16} \quad G_{25} \quad G_{34}$$

et la seconde les inconnues:

$$\Delta \quad \gamma_{16} \quad \gamma_{25} \quad \gamma_{34}.$$

Elles peuvent être traitées séparément en ce qui concerne la résolution des inconnues et le calcul de leurs poids. Quant au calcul de l'erreur moyenne dans l'unité de poids, nous démontrerons plus tard que $[g \ x \ x]$ ¹⁾ pour les équations originales est égal à:

$$[g \ x \ x] = [g \ x' \ x'] + [g \ x'' \ x']$$

et on trouve l'erreur moyenne de l'unité de poids de la manière ordinaire en divisant cette somme par le nombre des observations superflues c'est à dire 5.

1) Nous désignons les poids par g .

Les calculs ne donnant rien d'intéressant, nous ne donnons que le résultat, où nous avons remplacé αc^2 par β . On peut définir par conséquent 2β comme le rapport du poids de la détermination de la durée d'oscillation, noncorrigée pour la marche à celui de la correction de la marche calculée de deux déterminations de l'heure distancées d'une journée.

Nous trouvons:

$$T = \frac{1}{14\beta^2 + 14\beta + 3} [(3\beta + 1)(\beta + 1)t_{16} + (5\beta^2 + 5\beta + 1)t_{25} + (6\beta^2 + 5\beta + 1)t_{34}]$$

Pour le nombre réciproque du poids de T on a:

$$Q_T = \frac{(\beta^3 + 6\beta^2 + 5\beta + 1)}{\beta(14\beta^2 + 14\beta + 3)} c^2$$

et pour $[g'x'x']$ et $[g''x''x'']$:

$$[g'x'x'] = \frac{\beta}{(14\beta^2 + 14\beta + 3)} [(\beta + 1)(t_{16} - t_{25})^2 + (4\beta + 1)(t_{16} - t_{34})^2 + (2\beta + 1)(t_{25} - t_{34})^2] \frac{1}{c^2}$$

$$[g''x''x''] = \frac{\beta}{7\beta^3 + 14\beta^2 + 7\beta + 1} [(5\beta^2 + 5\beta + 1)\tau_{16}^2 + (6\beta^2 + 5\beta + 1)\tau_{25}^2 + (3\beta + 1)(\beta + 1)\tau_{34}^2 + 2\beta(3\beta + 1)\tau_{16}\tau_{25} + 2\beta^2\tau_{16}\tau_{34} + 2\beta(2\beta + 1)\tau_{25}\tau_{34}] \frac{1}{c^2}$$

Pour les deux valeurs extrêmes de β : 0 et ∞ , la solution prends la forme suivante:

1^o. $\beta = 0$ c'est à dire que l'erreur moyenne de la détermination de l'heure est zéro:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3} (t_{16} + t_{25} + t_{34}) \\ Q_T &= \frac{1}{3} \frac{c^2}{\beta} \\ [g'x'x'] &= \frac{1}{3} \frac{\beta}{c^2} [(t_{16} - t_{25})^2 + (t_{16} - t_{34})^2 + (t_{25} - t_{34})^2] \\ [g''x''x''] &= \frac{\beta}{c^2} [\tau_{16}^2 + \tau_{25}^2 + \tau_{34}^2] \end{aligned}$$

2^o. $\beta = \infty$ c'est à dire que l'erreur moyenne de la détermination de la durée d'oscillation corrigée de tout sauf de la correction de la marche est zéro:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{14} t_{16} + \frac{5}{14} t_{25} + \frac{6}{14} t_{34} \\ Q_T &= \frac{1}{14} c^2 \end{aligned}$$

1) Nous avons maintenu le facteur $\frac{1}{\beta}$ puisqu'en mettant $Q_T = \infty$ et $[g'x'x'] = 0$, l'erreur moyenne de T , étant proportionnelle au produit, serait infinie.

$$[g x' x'] = \frac{1}{14 c^2} [(t_{16} - t_{25})^2 + 4 (t_{16} - t_{34})^2 + 2 (t_{25} - t_{34})^2].$$

$$[g x'' x''] = \frac{1}{7 c^2} [5 \tau_{16}^2 + 6 \tau_{25}^2 + 3 \tau_{34}^2 + 6 \tau_{16} \tau_{25} + 2 \tau_{16} \tau_{34} + 4 \tau_{25} \tau_{34}]$$

Pour les valeurs intermédiaires de β , la solution se tient entre ces deux limites.

Dans le cinquième chapitre nous verrons qu'en notre cas elle diffère peu de la dernière valeur.

Reste maintenant à démontrer que la transformation des équations des erreurs est permise. D'abord il est clair qu'on peut remplacer deux équations à poids égal d'une groupe d'équations:

$$\begin{array}{rcl} x_1 = p_1 - a_1 A - b_1 B - c_1 C & \text{Poids } g_{12} \\ x_2 = p_2 - a_2 A - b_2 B - c_2 C & \text{,, } g_{12} \\ x_3 = p_3 - a_3 A - b_3 B - c_3 C & \text{,, } g_3 \\ \dots & \dots \end{array}$$

par:

$$\begin{array}{rcl} x'_1 = \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{(a_1 + a_2)}{2} A - \frac{(b_1 + b_2)}{2} B - \frac{(c_1 + c_2)}{2} C & \text{Poids } 2 g_{12} \\ x'_2 = \frac{(p_1 - p_2)}{2} - \frac{(a_1 - a_2)}{2} A - \frac{(b_1 - b_2)}{2} B - \frac{(c_1 - c_2)}{2} C & \text{,, } 2 g_{12} \\ x_3 = p_3 - a_3 A - b_3 B - c_3 C & \text{,, } g_3 \\ \dots & \dots \end{array}$$

sans que la solution en éprouve une modification, puisque les quantités:

$$[g a a] [g a b] [g a c] [g b b] [g b c] [g c c] [g a p] [g b p] [g c p] [g p p]$$

dont la solution des inconnues et de leurs erreurs moyennes dépend, restent les mêmes.

Ensuite on reconnaît aisément que si dans une groupe d'équations, deux inconnues ont le même facteur dans chaque équation il faut les réunir en une inconnue, puisqu'ils ne se laissent pas déterminer séparément, ce qui d'ailleurs n'aurait aucun sens. Il faut donc remplacer:

$$\begin{array}{rcl} x_1 = p_1 - a_1 A - a_1 B - c_1 C & \dots & \text{Poids } g_1 \\ x_2 = p_2 - a_2 A - a_2 B - c_2 C & \text{,,} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

par:

$$\begin{array}{rcl} x_1 = p_1 - a_1 D - c_1 C & \text{Poids } g_1 \\ x_2 = p_2 - a_2 D - c_2 C & \text{,,} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

où $D = (A + B)$.

Puisque la transformation des équations originales exécutée auparavant n'est que la combinaison des deux transformations examinées ici, on peut conclure qu'elle est permise.

Nous avons vu que la somme $[gxx]$ ne change pas par la transformation; si $[gx'x']$ et $[gx''x'']$ sont donc les valeurs pour les deux groupes d'équations qui forment ensemble la groupe totale des équations transformées, on a:

$$[gxx] = [gx'x'] + [gx''x'']$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par la même méthode on peut résoudre le problème pour un autre nombre de journées d'observation ou pour le cas un peu plus compliqué qu'on a deux groupes séparées de journées consécutives.

Nous faisons suivre ici un tableau de solutions pour différents cas:

Deux jours consécutifs; une observation superflue:

$$T = t_{12}$$

$$Q_r = \frac{\beta + 1}{\beta} c^2 \quad (47A)$$

$$[gxx] = \frac{\beta}{3\beta + 1} \tau_{12}^2 \frac{1}{c^2}$$

Trois jours consécutifs; deux observations superflues:

$$T = \frac{2}{10\beta + 3} \left[(3\beta + 1) t_{13} + \left(2\beta + \frac{1}{2} \right) t_2 \right]$$

$$Q_r = \frac{4\beta^2 + 8\beta + 2}{\beta(10\beta + 3)} c^2 \quad (47B)$$

$$[gx'x'] = \frac{\beta}{10\beta + 3} (t_{13} - t_2)^2 \frac{1}{c^2}$$

$$[gx''x''] = \frac{\beta}{2\beta + 1} \tau_{13}^2 \frac{1}{c^2}$$

Quatre jours consécutifs; trois observations superflues:

$$T = \frac{1}{5\beta + 2} [(2\beta + 1) t_{14} + (3\beta + 1) t_{23}]$$

$$Q_r = \frac{\beta^2 + 3\beta + 1}{\beta(5\beta + 2)} c^2 \quad (47C)$$

$$[gx'x'] = \frac{\beta}{5\beta + 2} (t_{14} - t_{23})^2 \frac{1}{c^2}$$

$$[gx''x''] = \frac{\beta}{(5\beta^2 + 5\beta + 1)} [(3\beta + 1) \tau_{14}^2 + (2\beta + 1) \tau_{23}^2 + 2\beta \tau_{14} \tau_{23}] \frac{1}{c^2}$$

Six jours consécutifs; cinq observations superflues:

$$T = \frac{1}{14\beta^2 + 14\beta + 3} [(3\beta + 1)(\beta + 1)t_{16} + (5\beta^2 + 5\beta + 1)t_{25} + (6\beta^2 + 5\beta + 1)t_{34}]$$

$$Q_r = \frac{\beta^3 + 6\beta^2 + 5\beta + 1}{\beta(14\beta^2 + 14\beta + 3)} c^2 \dots \dots \dots (47 D)$$

$$[g x' x'] = \frac{\beta}{14\beta^2 + 14\beta + 3} [(\beta + 1)(t_{16} - t_{25})^2 + (4\beta + 1)(t_{16} - t_{34})^2 + (2\beta + 1)(t_{25} - t_{34})^2] \frac{1}{c^2}$$

$$[g x'' x''] = \frac{\beta}{7\beta^3 + 14\beta^2 + 7\beta + 1} [(5\beta^2 + 5\beta + 1)\tau_{16}^2 + (6\beta^2 + 5\beta + 1)\tau_{25}^2 + (3\beta + 1)(\beta + 1)\tau_{34}^2 + 2\beta(3\beta + 1)\tau_{16}\tau_{25} + 2\beta^2\tau_{16}\tau_{34} + 2\beta(2\beta + 1)\tau_{25}\tau_{34}] \frac{1}{c^2}$$

Deux jours non-consécutifs; une observation superflue:

$$T = t_{12}$$

$$Q_r = \frac{2\beta + 1}{\beta} c^2 \dots \dots \dots (47 E)$$

$$[g x x] = \frac{\beta}{2\beta + 1} \tau_{12}^2 \frac{1}{c^2}$$

Deux jours consécutifs + un jour à part; deux observations superflues:

$$T = \frac{1}{5\beta + 3} [(4\beta + 2)t_{12} + (\beta + 1)t_3]$$

$$Q_r = \frac{(\beta + 1)(4\beta + 2)}{\beta(5\beta + 3)} c^2 \dots \dots \dots (47 F)$$

$$[g x' x'] = \frac{\beta}{5\beta + 3} (t_{12} - t_3)^2 \frac{1}{c^2}$$

$$[g x'' x''] = \frac{\beta}{3\beta + 1} \tau_{12}^2 \frac{1}{c^2}$$

Quatre jours consécutifs + deux jours consécutifs; cinq observations superflues:

$$T = \frac{1}{6\beta^2 + 10\beta + 3} [(3\beta + 1)(\beta + 1)t_{23} + (2\beta + 1)(\beta + 1)t_{14} + (\beta^2 + 3\beta + 1)t_{56}]$$

$$Q_r = \frac{(\beta + 1)(\beta^2 + 3\beta + 1)}{\beta(6\beta^2 + 10\beta + 3)} c^2 \dots \dots \dots (47 G)$$

$$[g x' x'] = \frac{\beta}{(6\beta^2 + 10\beta + 3)} [(t_{14} - t_{23})^2 + (2\beta + 1)(t_{14} - t_{56})^2 + (3\beta + 1)(t_{23} - t_{56})^2] \frac{1}{c^2}$$

$$[g x'' x''] = \frac{\beta}{(5\beta^2 + 5\beta + 1)} [(3\beta + 1)\tau_{14}^2 + (2\beta + 1)\tau_{23}^2 + 2\beta\tau_{14}\tau_{23}] \frac{1}{c^2} + \frac{\beta}{3\beta + 1} \tau_{56}^2 \frac{1}{c^2}$$

Signification des lettres.

c = constante par laquelle il faut multiplier la marche pour obtenir la correction de T .

2β = rapport du poids de la durée d'oscillation non-correctée pour la marche à celui de la correction pour la marche calculée de deux déterminations de l'heure distancées d'une journée.

$$t_{pq} = \frac{1}{2} (t_p + t_q).$$

$$\tau_{pq} = \frac{1}{2} (t_q - t_p).$$

$t_1 t_2 \dots$ = durées d'oscillation après l'application de toutes les corrections pour le premier jour, le second jour etc.

T = résultat final pour la durée d'oscillation corrigée.

Q_T = nombre réciproque du poids de T .

Le carré de l'erreur moyenne de l'unité de poids se détermine comme d'ordinaire en divisant la somme $[gx'x'] + [gx''x'']$ par le nombre des observations superflues.

Au moyen de ces formules nous déterminerons dans le cinquième chapitre β et l'erreur moyenne des résultats finaux T et des déterminations de l'heure.

Nous ferons le calcul des T dans le § 7 du quatrième chapitre en substituant cette valeur de β dans les formules pour T .



CHAPITRE II.

Description des appareils.

La commission disposait de deux appareils gravimétriques :

1^o. Un appareil „Von Sterneek” avec quatre pendules non-réversibles en bronze, remplacés depuis 1915 par quatre pendules en invar. Un chronomètre sert à la mesure de la durée d’oscillation.

2^o. Un appareil „Defforges” avec un pendule réversible en bronze. Une horloge astronomique de Strasser und Rohde est adaptée à la détermination des coïncidences.

Les observations de la première tournée furent exécutées avec les deux appareils, mais dès l’abord les résultats obtenus avec l’appareil Defforges témoignaient d’erreurs systématiques. Des expériences établies vers la fin de 1913 afin d’en rechercher la cause, démontrèrent que l’invariabilité du pendule n’est pas garantie et par conséquent on a dû renoncer à l’emploi de cet appareil. Nous nous dispenserons donc de donner une description de cet appareil, qu’on peut trouver d’ailleurs dans : „Observations de Pendule, Mém. du Dép. de la Guerre XV”, et nous nous bornerons à en dire ce qui est nécessaire pour rendre intelligible le résultat des expériences que nous faisons suivre.

Le pendule réversible a une forme symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à l’axe du pendule passant par le centre entre les deux couteaux. Les deux bouts du pendule sont creux et sont fermés par deux vis-bouchons, dont l’un est muni d’un poids et l’autre est vide. Ce poids a l’effet de mettre le centre de gravité en dehors du centre du pendule. On peut échanger ces deux vis-bouchons c’est à dire qu’on peut déplacer ainsi le centre de gravité à l’autre côté du centre du pendule.

Par cette disposition on a obtenu le même résultat que par un échange des deux couteaux.

C’est l’échange des deux vis-bouchons qui parut être la cause de la variabilité du pendule. L’expérience montra que le dévissage et le rajustage du vis-bouchon vide occasionne une augmentation très sensible de la durée d’oscillation, tandis que la même opération exécutée avec le vis-bouchon muni du poids ne produit pas de changement perceptible. L’augmentation constatée disparaît après un certain temps.

Nous faisons suivre ici les résultats des observations :

Date.	Heure.	Durée d'oscillation.
1913		
13 Octobre.	1 ^h . — p. m. — 2 ^h . — p. m.	0.7106307
	2 ^h . — „ — 3 ^h . — „	0.7106306
Le vis-bouchon muni du poids dévissé et remis à sa place.		
	4 ^h . 30 p. m. — 5 ^h . 30 p. m.	0.7106304
	5 ^h . 30 „ — 6 ^h . 30 „	0.7106309
	6 ^h . 30 „ — 8 ^h . — „	0.7106309
Les deux vis-bouchons dévissés et remis à leur places sans les échanger.		
14 Octobre.	10 ^h . 30 p. m. — 11 ^h . 30 p. m.	0.7106327
	11 ^h . 30 „ — 12 ^h . 30 „	0.7106329
	0 ^h . — „ — 1 ^h . — „	0.7106302
	1 ^h . — „ — 2 ^h . — „	0.7106301
Le vis-bouchon vide dévissé et remis à sa place.		
15 Octobre.	3 ^h . 30 p. m. — 4 ^h . 30 p. m.	0.7106324
	4 ^h . 30 „ — 5 ^h . 30 „	0.7106315
	2 ^h . 50 „ — 3 ^h . 50 „	0.7106296
	3 ^h . 50 „ — 4 ^h . 40 „	0.7106310

A cause des fluctuations constatées, l'appareil fut écarté; on s'est contenté depuis des observations avec l'appareil Von Sterneck.

Nous faisons suivre ici une courte description des appareils employés accompagnée de quelques renseignements nécessaires.

1^o. Un appareil „Von Sterneck” à quatre pendules, construit par STÜCKRATH— Berlin—Friedenau. L'appareil est de même construction que celui en usage en Allemagne; une description plus détaillée que la suivante se trouve dans les publications du prof. L. HAASEMANN ou dans une notice récemment parue: „Note sur l'appareil gravimétrique de l'observatoire royal de Belgique” par CH. FRANÇOIS.

L'appareil est représenté par la première planche. Les pendules oscillent deux à deux dans deux plans verticaux passant par l'axe de l'appareil et perpendiculaires l'un à l'autre. Le tout peut se couvrir d'une cloche en métal, permettant d'exécuter les observations dans le vide, et munie de deux fenêtres, par l'une desquelles se lisent la température et la pression de l'air (pour les petites pressions), par l'autre passent les rayons transmis par l'appareil de coïncidences.

Les pendules peuvent être mis en oscillation pendant que la cloche est fermée. Cela se fait au moyen de leviers pressant contre le poids des pendules, qui se manient du dehors, et qui, étant munis de vis calantes, permettent de régler l'amplitude donnée.

En tournant au même moment les leviers de deux pendules opposés, on leur donne une différence de phase π . Cette différence se réalise donc facilement à la main, tandis que pour une autre, le mouvement des leviers doit s'espacer d'un certain temps déterminé, ce qui est plus difficile à exécuter. L'appareil est muni d'un thermomètre P T R no. 21593 à division en 0,2 centigrades, encadré dans un corps en métal semblable aux pendules; on le voit à gauche sur la planche. La correction du thermomètre pour les différentes températures et pressions fut déterminée deux fois au: „Physikal. Techn. Reichsanstalt" à Charlottenburg, au commencement et à la fin des observations. Les deux tableaux de corrections étaient identiques à une différence constante près.

Deux niveaux, construits en forme de petits pendules, dont un est représenté sur la planche sur le bord gauche de l'appareil, servent au nivellement des plans de suspension.

2^o. Une base tronc-conique en cuivre rouge, munie en dessous d'un bord de 5 c.m., qui se fixe au sol par du gypse et en haut d'un bord plus large en fer portant les trois vis de nivellement de l'appareil.

3^o. Quatre pendules en bronze, et depuis le commencement de 1915 quatre pendules en invar construits par FECHNER à Potsdam. Les pendules non réversibles sont munis en haut d'un miroir vertical perpendiculaire au plan d'oscillation.

4^o. Un appareil de coïncidence „Von Sterneck" de construction ordinaire.

Il est représenté sur la deuxième planche après l'enlèvement de la paroi latérale. L'appareil est muni au devant d'une échelle verticale qui, en se reflétant dans les miroirs des pendules, donne quatre images, l'une à côté de l'autre dans le champ de la lunette. Les amplitudes des pendules se lisent en mesurant l'amplitude d'oscillation de ces images.

A chaque seconde l'appareil émet un éclair par une petite fenêtre au milieu de l'échelle, ouverte périodiquement au moyen d'un levier, activé par le courant électrique qui passe par le contact du chronomètre. Cet éclair reflète dans le miroir du pendule et fait une image dans la lunette.

Les images consécutives parcourent le champ de la lunette puisque le pendule et le chronomètre ne sont pas rigoureusement synchrones. Les coïncidences se déterminent en observant le moment de passage par le fil horizontal.

Pour les pendules en bronze les coïncidences sont espacées d'environ 180 secondes, pour ceux en invar d'environ 30 secondes.

5°. Un chronomètre à contact électrique (Nardin 212, Locle, Suisse) et un autre chronomètre (Hohwü No. 261) pour la détermination de l'heure.

6°. Un petit appareil pour la diminution de l'usure du contact du chronomètre en évitant la production d'étincelles. L'appareil dont le principe nous a été communiqué par M. le prof. HAASEMANN à Potsdam, consiste en plusieurs éléments remplis de H_2SO_4 avec deux pôles de platine. On en accouple un nombre tel que le potentiel suscité par un courant dépasse le potentiel du courant passant par le contact. L'appareil est mis parallèle au contact, de sorte que le courant induit qui causerait les étincelles y passe, tandis que le courant primaire ne passe que par le contact.

7°. Un baromètre anéroïde pour la détermination de la pression de l'air ambiant: jusqu'à 1916 le baromètre Bohne No. 9619, propriété de l'institut géographique à Utrecht; depuis le baromètre Olland No. 100, propriété du K. N. M. I. à de Bilt.

D'abord la correction du baromètre ne fut déterminée qu'avant et après chaque tournée, mais ayant remarqué des fluctuations assez considérables de cette correction nous avons employé depuis les renseignements du K. N. M. I. à de Bilt sur la pression barométrique aux stations pour un moment donné des observations. En prenant ces données pour base nous avons déduit la correction barométrique pour chaque station de nouveau. De cette manière nous l'obtenions avec une erreur moyenne de 0.5 m.m. au plus, tandis qu'autrement l'incertitude de la correction de la correction aurait été plus grande.

8°. Un hygromètre à cheveu afin de pouvoir tenir compte de l'humidité en déduisant la densité de l'air. L'appareil est représenté sur la quatrième planche au milieu sur le sol.

9°. Depuis 1919, les observations se faisant au vide:

9A. Une machine pneumatique rotative construite par BIANCHI, permettant d'atteindre facilement des pressions de 15 m.m. On en trouve un dessin et une courte description dans „Instruction sur la détermination de la densité réelle des poudres au moyen du densimètre Bianchi”.

L'appareil est représenté à gauche sur la quatrième planche.

9B. Un petit manomètre à mercure, attaché au thermomètre de l'appareil Von Sterneck, et permettant de déterminer des pressions entre 0 et 120 mm.

10°. Un appareil de nivellement „Stampfer” pour déterminer l'altitude des stations.

La lunette de cet appareil est pourvue d'une vis calante avec une échelle pour la mesure de petits angles verticaux.

La mire est munie de deux points fixes écartés de deux mètres. On la voit sur la quatrième planche dans l'arrière-plan.

On lit l'échelle de la vis de la lunette pour trois positions consécutives de la lunette :

- 1^o. la position horizontale ;
- 2^o. la mise au point d'un des points fixes de la mire ;
- 3^o. la mise au point de l'autre point fixes de la mire.

On reconnaît aisément que cela suffit pour déterminer la différence d'altitude.

L'appareil est très pratique pour une détermination rapide, puisque même dans un terrain accidenté, on peut faire de grandes nivellées.

Dans notre cas une détermination très superficielle suffisait, puisqu'il ne nous fallait connaître les altitudes qu'avec une précision de 50 c.m.

11^o. Depuis 1919 la détermination de l'heure se faisant en observant les signaux rythmés radiotélégraphiques de la Tour Eiffel, nous emmenâmes un appareil de réception à cadre mobile.

A chaque station l'appareil fut mis auprès du chronomètre Nardin, de sorte que la détermination fut faite sans l'intermédiaire d'un second chronomètre.

L'appareil de réception, construit par la : „Nederlandsche Seintoestellen-fabriek" à Hilversum, est représenté par la troisième planche, tandis qu'on la voit aussi à droite sur la quatrième planche à côté du cadre mobile improvisé qui ne consiste qu'en vingt tours de fil d'un diamètre d'environ un mètre, soutenu par un trépied.

Les signaux se recevaient ainsi partout avec une intensité plus que suffisante.



CHAPITRE III.

Détermination des constantes.

§ 1. Constantes pour la réduction à pression zéro.

A. Les constantes des pendules en bronze ont été déterminées à Potsdam par M. le prof. L. HAASEMANN ¹⁾ en partant de la formule monôme:

$$\delta\tau = CD$$

où D est la densité de l'air, qui est exprimée en une unité telle que $D = 1$ pour l'air de 760 m.m. et 0°. Nous verrons que l'application de cette formule est permise si on ne fait que des observations à pression atmosphérique comme cela a été le cas pour les observations en Hollande avec ces pendules.

Le résultat obtenu était:

$$\begin{aligned} C_{88} &= 665.9 \\ C_{90} &= 668.4 \\ C_{89} &= 673.2 \\ C_{91} &= 693.9. \end{aligned}$$

B. Les constantes des pendules en invar ont été déterminées en Hollande.

Nous commencerons par une recherche concernant l'applicabilité de la formule monôme.

Nous supposons admis qu'en vérité la perturbation de la durée d'oscillation par l'air ambiant est représentée par la formule binôme:

$$\delta\tau = C_1 D + C_2 \sqrt{p} \dots \dots \dots (50)$$

où p est la pression de l'air.

Pour les pendules de l'appareil VON STERNECK le premier terme est beaucoup plus grand que le second, de sorte qu'il est clair que la formule:

$$\delta\tau = C_3 D \dots \dots \dots (51)$$

est une approximation qui s'approche de la réalité. Nous évaluerons maintenant l'erreur de cette approximation.

Puisque pour le calcul de g on n'a besoin que de la différence des durées d'oscillation, ce n'est que la différence des corrections $\delta\tau$ qui entre dans ce résultat.

En Hollande les observations avec les pendules en invar ont été exécutées à des pressions, ne variant que peu aux différentes stations. Jusqu'en

¹⁾ Verb. der int. Erdmessung, Budapest 1908, II pages 5 et 11.

1919 on les a fait à pression atmosphérique, variant entre 735 et 775 m.m. Depuis on a observé à des pressions variant de 20 à 70 m.m. avec quelques exceptions rares, où la pression a monté jusqu'à 100 m.m., mais les moyennes aux différentes stations ne variaient que de 30 à 60 m.m. On peut donc affirmer qu'en général les fluctuations de p ne dépassaient pas 40 m.m. C'est à dire que celles de D restaient au dessous de 0.06.

Désignons la fluctuation de D par dD ; la formule (50) nous donne alors la valeur de la fluctuation correspondante de la correction:

$$d(\delta\tau) = \left(C_1 + \frac{C_2 e}{2 \sqrt{D}} \right) dD. \quad \dots \quad (52)$$

où e est défini par:

$$e^2 = \frac{p}{D}$$

e ne dépend donc que de la température et de l'humidité de l'air. Pour une valeur moyenne de ces quantités e est 28; pour d'autres valeurs il ne s'en écarte pas beaucoup.

La formule approximative (51) donne:

$$d(\delta\tau) = C_3 dD \quad \dots \quad (53)$$

Pour que cette formule donne le même résultat il est nécessaire que:

$$C_3 = C_1 + \frac{C_2 e}{2 \sqrt{D_0}}$$

où D_0 est la valeur de D pendant l'observation.

Il s'ensuit donc que le C_3 qu'il faudrait choisir pour des observations à pression atmosphérique (D_0 à peu près = 1) est un autre que la valeur, qu'il faudrait appliquer pour les petites pressions (D_0 de 0.03 à 0.09).

Quand on détermine C_3 en faisant des observations à deux pressions différentes D' et D'' on obtient le résultat de l'équation:

$$C_3 = \frac{T' - T''}{D' - D''}$$

et en négligeant les erreurs d'observation on trouve en appliquant la formule (50):

$$C_3 = \frac{(D' - D'') C_1 + (\sqrt{D'} - \sqrt{D''}) C_2 e}{(D' - D'')} = C_1 + \frac{1}{(\sqrt{D'} + \sqrt{D''})} C_2 e$$

On peut encore choisir D' et D'' . Pour obtenir la valeur exigée de C_3 il faudrait le faire d'une telle manière que:

$$\sqrt{D'} + \sqrt{D''} = 2 \sqrt{D_0}$$

Cela est manifestement impossible pour la valeur $D_0 = 0$, mais il l'est aussi pour $D_0 = 1$ puisque l'appareil ne permet pas des pressions plus grandes qu'une atmosphère.

Il y aura donc toujours une erreur. Nous la déterminerons pour différentes valeurs de D' et D'' .

A. $D' = 1$ et $D'' = 0$; c'est à dire qu'on fait les observations pour la détermination de C_3 à pression atmosphérique et au vide.

On trouve:

$$C_3 = C_1 + C_2 e$$

C_3 est donc erronée de

$$C_2 e \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{D_0}} \right)$$

Pour les observations à pression atmosphérique (D_0 environ 1) cette erreur a donc la valeur:

$$\frac{1}{2} C_2 e$$

Pour celles à petite pression (D_0 par exemple 0,062):

$$- C_2 e$$

B. Pour la détermination de C_3 on fait des observations à des pressions montant graduellement de 0 à 760 m.m., c'est à dire que D a consécutivement toutes les valeurs entre 0 et 1. Une examination spéciale de ce cas démontre pour le résultat C_3 :

$$C_3 = C_1 + 0.8 C_2 e.$$

C'est à dire que l'erreur est:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } D_0 = 1 & : \quad 0.3 C_2 e \\ \text{,, } D_0 = 0.062 & : \quad - 1.2 C_2 e. \end{array}$$

C. $D' = 1$ et $D'' = 0.7$, c'est à dire qu'on détermine C_3 par des observations à pression atmosphérique, et à une pression d'environ 500 m.m. *)

On trouve:

$$C_3 = C_1 + 0.54 C_2 e$$

donc l'erreur est:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } D_0 = 1 & : \quad 0.04 C_2 e \\ \text{,, } D_0 = 0.062 & : \quad - 1.46 C_2 e \end{array}$$

D. $D' = 0.03$ et $D'' = 0.3$, c'est à dire qu'on détermine C_3 par des observations à petite pression et à une pression d'environ 200 m.m. *)

On trouve:

$$C_3 = C_1 + 1.39 C_2 e$$

donc l'erreur est:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } D_0 = 1 & : \quad + 0.89 C_2 e \\ \text{,, } D_0 = 0.062 & : \quad - 0.61 C_2 e \end{array}$$

*) On ne peut amoindrir davantage la différence de D' et D'' sans augmenter trop l'erreur du résultat C_3 .

En résumant, et en substituant pour $C_2 e$ sa valeur d'environ $100 \cdot 10^{-7}$ sec. et pour dD sa valeur de 0.06, la formule (52) donne pour l'erreur des différences des corrections $d(\delta\tau)$:

Détermination de C_3 par :

	Methode A	Methode B	Methode C	Methode D
pour $D_0 = 1$:	$+ 3 \cdot 10^{-7}$ sec.	$+ 1.8 \cdot 10^{-7}$ sec.	$+ 0.24 \cdot 10^{-7}$ sec.	$+ 5.3 \cdot 10^{-7}$ sec.
$D_0 = 0$:	$- 6 \cdot 10^{-7}$ sec.	$- 7.2 \cdot 10^{-7}$ sec.	$- 8.7 \cdot 10^{-7}$ sec.	$- 3.7 \cdot 10^{-7}$ sec.

Quand on détermine C_3 par les deux premières méthodes, l'erreur est trop grande pour être admissible, aussi bien pour les observations à pression atmosphérique, que pour celles à petite pression.

En appliquant la troisième méthode, on obtient une valeur de C_3 qui ne donne qu'une petite erreur pour les observations à pression atmosphérique.

Cependant la quatrième méthode (analogue à la précédente par rapport aux petites pressions) n'a pas le même succès pour les observations à petite pression. Quoiqu'elle amoindrisse l'erreur pour $D_0 = 0$, celle-ci est encore trop grande pour être admise.

Le résultat de la recherche peut donc se représenter par les conclusions suivantes :

I. Quand on fait les observations à petite pression, on ne peut pas négliger le terme proportionnel à \sqrt{p} .

II. Quand on fait les observations à pression atmosphérique on peut négliger ce terme à condition qu'on fasse la détermination de C_3 à pression atmosphérique et à une pression qui est encore assez grande (par exemple 500 m.m.

Dans notre cas le terme proportionnel à \sqrt{p} ne peut donc être négligé; il faut donc déterminer deux constantes: C_1 et C_2 et il faut toujours se servir de la formule binôme.

Choix du programme pour la détermination des constantes.

Pour déterminer les constantes il faut faire des observations à au moins trois pressions différentes. Nous l'avons fait en faisant deux séries d'observations; l'une à une pression alternativement atmosphérique et très petite (environ 30 m.m.) l'autre à des pressions alternativement de 220 m.m. et 30 m.m.

Nous avons choisi ce programme, puisqu'il donnait un maximum de précision pour le résultat avec un nombre donné d'observations. Le choix des pressions pour la première série d'observations est clair, parce que la précision augmente en faisant les observations à des pressions aussi grande et aussi petite que possible. Quant aux pressions pendant la seconde série il est clair qu'une des deux pressions doit être une limite, soit qu'elle est aussi grande, soit qu'elle est aussi petite que possible. Supposons d'abord qu'elle est aussi petite que possible. La choix de l'autre pression s'établit par le calcul suivant :

Si D' et D'' représentent les limites, c'est à dire si D' est environ 1 et D'' environ 0.03, les deux séries d'observation fournissent les équations:

$$(D' - D'') C_1 + (\sqrt{D'} - \sqrt{D''}) C_2 e = \Delta_1 \dots \dots (54 A)$$

$$(D - D'') C_1 + (\sqrt{D} - \sqrt{D''}) C_2 e = \Delta_2 \dots \dots (54 B)$$

où Δ_1 et Δ_2 sont les différences des durées d'oscillation observées, et D est la pression encore inconnue.

Nous négligerons pour ce calcul les fluctuations de e par les changements de température et d'humidité.

On déduit de (54):

$$C_1 = \frac{1}{(\sqrt{D'} - \sqrt{D})} \left[\frac{\Delta_1}{\sqrt{D'} - \sqrt{D''}} - \frac{\Delta_2}{\sqrt{D} - \sqrt{D''}} \right] \dots \dots (55 A)$$

$$C_2 e = \frac{1}{(\sqrt{D'} - \sqrt{D})} \left[-\frac{\sqrt{D} + \sqrt{D''}}{\sqrt{D'} - \sqrt{D''}} \Delta_1 + \frac{\sqrt{D'} + \sqrt{D''}}{\sqrt{D} - \sqrt{D''}} \Delta_2 \right] (55 B)$$

Si la connaissance de C_1 ou $C_2 e$ était l'objet essentiel de la recherche, il faudrait déterminer la valeur de D qui rend l'erreur de ces valeurs un minimum. Cependant cela n'est pas le cas, puisque nous avons démontré (formule 52) que l'erreur $d(\delta\tau)$ qui entre dans le résultat des observations est proportionnelle à la quantité:

$$C_1 + \frac{C_2 e}{2\sqrt{D_0}}$$

que nous désignerons par u (D_0 est la pression à laquelle nous avons fait les observations de voyage).

En substituant les valeurs de C_1 et $C_2 e$ trouvé ci-dessus, on a:

$$u = \frac{1}{(\sqrt{D'} - \sqrt{D})} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D''}}{2\sqrt{D_0}} \right) \frac{\Delta_1}{\sqrt{D'} - \sqrt{D''}} - \left(1 - \frac{\sqrt{D'} + \sqrt{D''}}{2\sqrt{D_0}} \right) \frac{\Delta_2}{\sqrt{D} - \sqrt{D''}} \right]$$

et on déduit pour l'erreur moyenne:

$$m_u^2 = \frac{1}{(\sqrt{D'} - \sqrt{D})^2} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D''}}{2\sqrt{D_0}} \right)^2 \frac{m_1^2}{(\sqrt{D'} - \sqrt{D''})^2} + \left(1 - \frac{\sqrt{D'} + \sqrt{D''}}{2\sqrt{D_0}} \right)^2 \frac{m_2^2}{(\sqrt{D} - \sqrt{D''})^2} \right]$$

où m_1 est l'erreur moyenne de Δ_1 et m_2 de Δ_2 . La valeur de D qui rend m_u^2 un minimum se détermine maintenant de l'équation:

$$\frac{\partial (m_u^2)}{\partial D} = 0.$$

Cette valeur n'est pas tout à fait indépendante de D_0 . Ayant exécuté les observations de voyage à deux pressions différentes: d'abord à $D_0 = 1$, plus tard à $D_0 = 0.04$ à 0.07 , nous ne trouverons donc ni le même résultat D pour les deux cas, ni la même valeur de m_u .

Nous nous contenterons de rendre minimum la plus grande des deux m_n , c'est à dire le m_n appartenant aux petites valeurs de D_0 (voir (55)).

De cette manière le m_n pour le cas $D_0 = 1$ est un peu plus grand, que la valeur qu'on pourrait obtenir par un choix un peu modifié de D , mais la différence est petite et il reste encore bien au dessous du m_n appartenant aux petites valeurs de D_0 .

Si D_0 est petit le résultat trouvé pour la valeur la plus favorable de D peut être donné approximativement par :

$$\sqrt{D} = \frac{1}{2} (\sqrt{D'} + \sqrt{D''}) = 0.6$$

donc :

$$D = 0.36.$$

Quand on fait la deuxième série en choisissant pour D'' (formule 54B) l'autre limite ($D'' = 1$), on trouve à peu près la même valeur pour D . Seulement dans ce cas, le m_n pour les petites valeurs de D_0 augmente un peu, tandis que le m_n pour $D_0 = 1$ diminue. Le premier m_n étant déjà le plus grand, nous choisissons le premier.

On aurait pu réunir les deux séries en une série d'observations à trois pressions différentes D', D, D'' . Cependant dans notre cas la première méthode est préférable pour la raison suivante: Le chronomètre employé n'a pas une marche irréprochable. En faisant des observations alternativement à deux pressions différentes, on obtient un contrôle plus effectif de la marche, puisque les observations à pression identique se répètent après un intervalle plus court. Nous expliquerons ci-dessous la méthode de calcul, par laquelle nous nous sommes servi du résultat de ce contrôle pour donner un poids différent aux observations.

Dans chaque journée d'observation nous avons fait cinq observations des quatre pendules oscillant ensemble; la première, la troisième, et la cinquième observation à l'une des deux pressions, la seconde et la quatrième à l'autre.

Les différences de la durée d'oscillation de chaque pendule et de la moyenne des quatre durées n'est pas perturbée par les fluctuations de la marche, tandis que la moyenne elle-même en subit bien l'influence.

Cette remarque donne lieu à une division du calcul en deux parties:

1^o. Le calcul de la moyenne des constantes des quatre pendules. Les moyennes des quatre durées d'oscillation, observées ensemble, lui servent de base; le résultat subit donc l'influence de l'irrégularité de la marche.

2^o. Le calcul de la différence des constantes et de la moyenne des constantes mentionnée ci-dessus. Le résultat est indépendant des fluctuations de la marche.

Nous commençons par examiner le second calcul.

Si $p_1 \dots p_5$ sont les différences $T - T_{moyenne}$ pour un des pendules, calculées des observations d'une journée, on a les équations:

$$\begin{aligned} p_1 &= A + C_1 D_1 + C_2 \sqrt{p_1} \\ p_2 &= A + C_1 D_2 + C_2 \sqrt{p_2} \\ &\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ p_5 &= A + C_1 D_5 + C_2 \sqrt{p_5} \end{aligned}$$

D_1 , D_3 et D_5 ont à peu près la même valeur, ainsi que D_2 et D_4 ; p_1 , p_3 , p_5 ; et p_2 , p_4 . On peut les résoudre par la méthode des moindres carrés.

Cependant on reconnaît aisément qu'on obtient le même résultat en résolvant les équations un peu plus simples:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= p_1 - p_2 = C_1 (D_1 - D_2) + C_2 (\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}) \\ \Delta_{32} &= p_3 - p_2 = C_1 (D_3 - D_2) + C_2 (\sqrt{p_3} - \sqrt{p_2}) \\ \Delta_{34} &= p_3 - p_4 = C_1 (D_3 - D_4) + C_2 (\sqrt{p_3} - \sqrt{p_4}) \\ \Delta_{54} &= p_5 - p_4 = C_1 (D_5 - D_4) + C_2 (\sqrt{p_5} - \sqrt{p_4}) \end{aligned} \quad (56)$$

à condition qu'on donne aux deux équations médianes le poids $\frac{1}{2}$.

Nous avons exécuté le calcul de cette manière, en prenant ensemble les équations de toutes les journées.

Pour le deuxième calcul, c'est à dire celui de la moyenne des constantes, nous avons employé les mêmes équations. Seulement nous leur avons donné un poids dépendant de la régularité de la marche du chronomètre.

Supposons pour simplifier qu'on ne fait que trois observations T_1 , T_2 et T_3 par jour, dont T_1 et T_3 à l'une des deux pressions et T_2 à l'autre, de sorte que les constantes cherchées se déduisent de la quantité $\frac{T_1 + T_3}{2} - T_2 = \Delta$.

En négligeant les erreurs d'observation, nous supposons que la différence ($T_3 - T_1$) n'est occasionnée que par une fluctuation de la marche du chronomètre; et nous nous demandons maintenant quelle est l'erreur moyenne de Δ qui en résulte. A cette fin nous considérerons deux possibilités extrêmes.

1^{re} hypothèse.

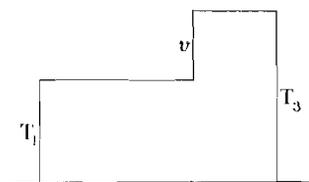


Fig. 15.

La marche a changé brusquement de la valeur qu'elle avait pendant la première observation T_1 à la valeur, qu'elle avait pendant la troisième T_3 (nous désignons la différence ($T_3 - T_1$) par v) cette variation brusque peut s'être produite, à chaque moment pendant la deuxième observation, (Fig. 15).

L'erreur de $\Delta = \frac{(T_1 + T_3)}{2} - T_2$ peut donc varier entre les limites $+\frac{1}{2}v$ et $-\frac{1}{2}v$, chaque valeur ayant une probabilité égale.

L'erreur moyenne se calcule donc à :

$$m_{\Delta}^2 = \frac{1}{v} \int_{-\frac{1}{2}v}^{+\frac{1}{2}v} x^2 dx = \frac{1}{12} v^2.$$

2^e hypothèse.

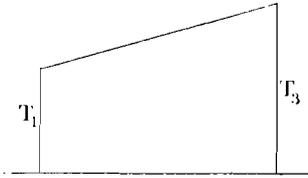


Fig. 16.

La marche a changé linéairement. On reconnaît aisément qu'alors $\Delta = \frac{(T_1 + T_3)}{2} - T_2$ n'est pas erroné, c'est à dire qu'en ce cas l'erreur moyenne est nulle. (Fig. 16).

En supposant que la fluctuation réelle de la marche soit comprise entre ces deux possibilités, nous avons choisi pour l'erreur moyenne de Δ la valeur :

$$m_{\Delta}^2 = \frac{1}{24} v^2.$$

A côté de cette cause d'erreur on a les erreurs d'observation qui contribuent à l'erreur moyenne totale de Δ . En désignant par m l'erreur moyenne d'une détermination d'une durée d'oscillation après l'application de toutes les autres corrections sauf celle de la marche, l'erreur moyenne de la moyenne T des quatre durées d'oscillation se calcule à $\frac{1}{2} m$, et l'erreur moyenne de $\Delta = \frac{T_1 + T_3}{2} - T_2$ à $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} m$.

L'erreur moyenne totale de Δ est donc :

$$m_{\Delta}^2 = \frac{3}{8} m^2 + \frac{1}{24} v^2.$$

Nous avons déduit m de l'erreur moyenne des différences de chaque durée d'oscillation et de la moyenne des quatre durées, ces différences étant indépendantes de la marche. Cette erreur moyenne doit être égale à :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} m.$$

Nous avons trouvé :

Pour la première série d'observations en 1917 $m^2 = 16$ ¹⁾

Pour la seconde série d'observations en 1922 $m^2 = 6$ ¹⁾

donc pour le cas supposé de trois observations par jour nous aurions :

1^e série : $m_{\Delta}^2 = 6 + \frac{1}{24} v^2$

2^e série : $m_{\Delta}^2 = 2 + \frac{1}{24} v^2$

¹⁾ Ces valeurs de m^2 sont très bien en accord avec les valeurs déduites dans le Chapitre V de l'ensemble des observations de voyage ou nous avons trouvé :

Observations en 1915 $m^2 = 15.9$

Observations en 1918-1921 $m^2 = 5.8$

Nous avons appliqué une déduction analogue au cas un peu plus compliqué de cinq observations par jour; les valeurs déduites de m_{Δ}^2 ont servi de base à la détermination du poids de chaque observation, en y faisant g inversement proportionnel.

Les quatre équations (56) d'une journée ont ainsi reçu les poids:

1 ^e série:	2 ^e série:
$g_{12} = \frac{6}{6 + \frac{1}{24}(T_3 - T_1)^2}$	$g_{12} = \frac{2}{2 + \frac{1}{24}(T_3 - T_1)^2}$
$g_{32} = \frac{6}{12 + \frac{1}{24}(T_3 - T_1)^2}$	$g_{32} = \frac{2}{4 + \frac{1}{24}(T_3 - T_1)^2}$
$g_{34} = \frac{6}{12 + \frac{1}{24}(T_5 - T_3)^2}$	$g_{34} = \frac{2}{4 + \frac{1}{24}(T_5 - T_3)^2}$
$g_{54} = \frac{6}{6 + \frac{1}{24}(T_5 - T_3)^2}$	$g_{54} = \frac{2}{2 + \frac{1}{24}(T_5 - T_3)^2}$

Résultat des déterminations.

La première série des observations donnait pour la déduction des constantes moyennes des quatres pendules l'équation (correspondant à 54 A):

$$0.873 C_1 + 19.66 C_2 = \Delta_1 = 606.5 \quad m_1^2 = 1.69 \text{ 1)}$$

et la deuxième série l'équation (correspondant à 54 B):

$$0.301 C_1 + 11.62 C_2 = \Delta_2 = 225.6 \quad m_2^2 = 1.05 \text{ 1)}$$

donc:

$$C_1 = + 2.750 \quad \Delta_1 - 4.630 \Delta_2 = 618.3$$

$$C_2 = - 0.0712 \Delta_1 + 0.206 \Delta_2 = 3.396.$$

L'erreur moyenne des constantes qui s'ensuit de m_1 et m_2 est:

$$m_{e_1} = 5.9$$

$$m_{e_2} = 0.230$$

L'erreur moyenne qui entre dans le resultat final des observations est l'erreur moyenne de la différence de deux reductions, qui se calcule suivant la formule (52) à

$$d(\delta\tau) = \left(C_1 + \frac{C_2 e}{2\sqrt{D_0}} \right) dD = u dD.$$

On trouve pour l'erreur moyenne de u :

$$m_u^2 = \left(-4.63 + \frac{2.9}{\sqrt{D_0}} \right)^2 \times 1.69 + \left(2.75 - \frac{1.0}{\sqrt{D_0}} \right)^2 \times 1.05$$

$$= 44.1 - \frac{51.2}{\sqrt{D_0}} + \frac{15.2}{D_0}$$

ce qui donne approximativement:

$$m_u = 6.6 - \frac{3.9}{\sqrt{D_0}}.$$

1) m_1 et m_2 sont les erreurs moyennes de Δ_1 et de Δ_2 .

Pour les observations à pression atmosphérique on obtient donc, en supposant une différence maximale dD de 0.05 entre les diverses stations, une erreur moyenne maximale dans les différences des T de ces deux stations de $0.14 \cdot 10^{-7}$ sec.

Pour les observations à petite pression on obtient en supposant une différence maximale dD de 0.03, une erreur moyenne maximale dans les différences des T de $0.27 \cdot 10^{-7}$ sec.

Nous verrons dans le cinquième chapitre que ces erreurs sont négligeables auprès des autres erreurs des observations.

La déduction de la différence des constantes de chaque pendule et des constantes moyennes se faisait de la même manière, avec la seule différence que le poids des différentes équations était autre (form. 56). Elle donnait les résultats suivants:

Pendule no. 12	$C_1 = 618.3 - 15.1$	$C_2 = 3.396 + 0.584$
„ „ 1	$- 2.7$	$- 0.022$
„ „ 11	$+ 18.8$	$- 0.483$
„ „ 9	$- 1.4$	$- 0.071$

L'erreur moyenne de ces valeurs n'a pas d'importance puisqu'elle n'a aucune influence sur l'erreur moyenne du résultat des observations.

En dernier lieu on obtient donc les valeurs totales des constantes:

Pendule no. 12	$C_1 = 603.2 \cdot 10^{-7}$ sec.	$C_2 = 3.980 \cdot 10^{-7}$ sec.
„ no. 1	$C_1 = 615.6 \cdot 10^{-7}$ „	$C_2 = 3.374 \cdot 10^{-7}$ „
„ no. 11	$C_1 = 637.1 \cdot 10^{-7}$ „	$C_2 = 2.913 \cdot 10^{-7}$ „
„ no. 9	$C_1 = 616.9 \cdot 10^{-7}$ „	$C_2 = 3.325 \cdot 10^{-7}$ „

§ 2. Détermination des constantes de la température.

Les constantes des pendules de bronze ont été déterminées par M. le prof. L. HAASEMANN à Potsdam.¹⁾

Il a obtenu:

$$\begin{aligned} C_{88} &= 47.03 \\ C_{90} &= 46.94 \\ C_{89} &= 46.39 \\ C_{91} &= 46.98 \end{aligned}$$

La détermination des constantes des pendules d'invar a été commencée en Hollande en 1918 mais des difficultés insurmontables résultant principalement de la marche irrégulière du chronomètre, ont donné lieu à y renoncer et à

1) Verh. der int. Erdmessung, Budapest 1908 II, pages 5 et 11.

demander en 1921 la permission de l'exécuter à Potsdam, où M. le prof. HAASEMANN a bien voulu mettre à notre disposition l'appareil qu'il a construit pour maintenir les températures constantes.¹⁾ L'appareil a très bien fonctionné pendant toute la durée des observations.

Nous avons accepté l'hypothèse que la constante des pendules ne varie pas avec la température entre des limites convenables et nous avons donc renoncé à faire des observations à des températures médianes pour contrôler cette hypothèse.

Nous avons exécuté les observations à 39° — 40° et à 6° — 9° . Pour nous assurer plus effectivement que l'invar n'a pas subi de changements systématiques par les fluctuations de la température, nous avons encore répété une fois la détermination, de sorte que nous avons observé en tout :

quatre séries à 39°
 six " " 9°
 " " " 40°
 " " " 6° — 7°
 quatre " " 39° — 40°

Le résultat a été satisfaisant; nous n'avons pu constater aucune perturbation: la moyenne de la durée d'oscillation pendant les trois groupes de séries à température élevée a été pour les quatre pendules:

	No. 12.	No. 1.	No. 11.	No. 9.
1 ^e groupe:	0.5084337.1	0.5084319.2	0.5084505.2	0.5084564.2
2 ^e " :	4337.0	4313.4	4504.9	4563.5
3 ^e " :	4339.9	4308.0	4502.8	4563.3

Le résultat obtenu pour les constantes était:

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= 3.76 \pm 0.03 \quad 10^{-7} \text{ sec.} \\
 C_1 &= 3.76 \pm 0.08 \quad 10^{-7} \text{ " } \\
 C_{11} &= 4.05 \pm 0.03 \quad 10^{-7} \text{ " } \\
 C_9 &= 3.76 \pm 0.03 \quad 10^{-7} \text{ " }
 \end{aligned}$$

¹⁾ Voir description dans: Veröff. des Kön. Preuss. Geod. Inst. N. F. no. 71: Bestimmung der Intens. der Schwerkraft in der Nähe der Meridians 9° E. v. G. Fomer in Ostpreussen etc. und in den deutschen Mittelgebirgen.

CHAPITRE IV.

Tournées d'observation.

§ 1. Choix des stations.

Au début on avait l'intention de choisir la station centrale à Delft au bureau central de la triangulation, mais on y a renoncé lorsque les observations démontrèrent une trop grande influence des mouvements du sous-sol marécageux. On a trouvé ensuite un endroit favorable sur terre ferme à de Bilt, où la perturbation par les mouvements du sol est négligeable. On a pu s'installer là dans le sous-sol de l'Institut Royal Météorologique des Pays-Bas à sol en béton armé. La température y est assez constante, de sorte qu'on n'éprouvait pas de difficultés à cet égard.

Quant aux autres stations d'observation, on a choisi en premier lieu les stations astronomiques où on avait déjà déterminé les déviations de la latitude et de l'azimut. On a complété le nombre par d'autres stations, de sorte qu'on a obtenu un réseau dont les distances varient en général entre 20 à 35 K.M. Pour la plupart ces stations sont situées dans la proximité immédiate des points de triangulation du premier ordre. Ayant fait un calcul provisoire à chaque station pendant la tournée on a eu l'occasion de changer quelques fois un peu le programme d'après les résultats obtenus.

Nous donnons une liste alphabétique des stations dans l'annexe n°. 1 avec des renseignements sur le lieu d'observation, les coordonnées géographiques, l'altitude au dessus de N. A. P. (Zéro d'Amsterdam), le coefficient de l'entraînement et l'année de l'observation, avec un chiffre pour les années où nous avons exécuté plus d'une tournée. Les stations astronomiques sont désignées par un astérisque.

La latitude et la longitude des stations ont été calculées en reliant les stations aux stations de la triangulation à l'aide de la carte de l'Etat Major, soit celle à échelle 1 : 25000, soit celle à échelle 1 : 50000.

A chaque station nous avons cherché un local à sol ferme en béton ou pavé de carreaux ou de briques et à température aussi constante que possible. Après avoir mis en usage les pendules en invar les exigences concernant cette dernière condition devenaient beaucoup moindres. Aussi depuis ce moment nous n'avons eu aucune difficulté à y satisfaire. Dans la plupart des cas nous pûmes nous servir d'une cave.

A l'exception de Leiden et Delft nous n'avons trouvé nulle part un pilier à fondement spécial pour y mettre l'appareil. Nous croyons que cela n'a pas été un inconvénient grave, ayant constaté aux dites stations que les piliers spéciaux partagent encore plus les mouvements du sous-sol marécageux, qu'un sol ferme relié solidement à un bâtiment de grandes dimensions.

§ 2. Liste chronologique des tournées.

Nous faisons suivre ici une liste chronologique des différentes tournées. Au début et à la fin de chaque tournée des observations furent exécutées à la station centrale de Bilt.

Observations avec les deux appareils :

1913. Stations: Wolberg, Harikerberg.

Observations avec l'appareil Von Sterneck (4 pendules de bronze, Nos. 88, 89, 90, 91):

1914 I. Station: Sambeek; la tournée fut interrompue par l'explosion de la guerre.

1914 II. Stations: Sleen, Groningen, Leeuwarden, Utrecht, Delft.

1914/15. Détermination de la différence de Bilt—Potsdam.

Observations avec l'appareil Von Sterneck (4 pendules d'invar, Nos. 9, 1, 11, 12):

1915 I. Stations: Leiden, Schoorl, Urk, Terschelling, Ameland.

1915 II. Stations: Cocksdoorp, Enkhuizen, Harlingen, Leeuwarden, Amersfoort.

1918. Stations: Assen, Steenwijk, Hollander, Winterswijk, de Steeg, Oss, Gorinchem.

1919. Stations: Oud-Beijerland, Zierikzee, Middelburg, Terneuzen, Bergen-op-Zoom, Breda, Ede.

1920 I. Stations: Sambeek, Ubagsberg, Maastricht, Sittard, Weert, Oirschot, Blerick, Deurne.

1920 II. Stations: Winschoten, Hoogeveen, Heerenveen, Buitenpost, Workum, Helder, Hoorn, Haarlem, Amsterdam, Gouda, Oldenzaal, Apeldoorn.

1921. Détermination de la différence de Bilt—Potsdam.

Remarques.

Pendant la seconde tournée de 1914 les pendules avaient subi des changements assez considérables ($29 \cdot 10^{-7}$ sec pour la moyenne). Afin d'amoinrir l'incertitude des résultats de cette tournée nous avons répété les observations à la station de Leeuwarden en 1915, de sorte que nous pouvions réduire les valeurs trouvées à Leeuwarden en 1914 à la station centrale de Bilt. Cette valeur à de Bilt, à côté des valeurs trouvées au début et à la fin, a été employée pour le calcul des autres stations de cette tournée.

Pendant la détermination de la différence de de Bilt—Potsdam en 1914/15 les pendules ont montré aussi des fluctuations; quoique les moyennes trouvées à de Bilt au commencement et à la fin correspondèrent assez bien, la variation des différences des quatre durées d'oscillation donna lieu à des soupçons. Aussi on a cru devoir répéter plus tard les observations à Potsdam avec les pendules d'invar qui s'étaient tenus beaucoup mieux pendant les tournées. La détermination en 1921 a donné un résultat qui diffère sensiblement de celle trouvée en 1914; la différence des durées d'oscillation aux deux stations est $7 \cdot 10^{-7}$ sec. plus grande en 1921. En vue de la bonne concordance des résultats et le grand nombre des observations exécutées en 1921 il y a lieu d'y attacher beaucoup de confiance; nous avons donc accepté la valeur déduite de ces observations comme valeur définitive de la différence de de Bilt—Potsdam. Nous voulons ajouter encore que les changements subis par les pendules de bronze atteignirent plus d'une fois des valeurs plus considérables que $7 \cdot 10^{-7}$ sec., de sorte qu'il est bien fondé d'écarter les résultats de la détermination en 1914.

§ 3. Détermination de l'altitude des stations.

L'altitude a été déterminée à l'aide d'un appareil de nivellement „Stampfer” (Chap. II). Nous nous sommes contenté d'une détermination superficielle en faisant de grandes nivellées; les erreurs trouvées en répétant le nivellement en sens inverse n'excédaient cependant jamais quelques centimètres. Si la distance n'était pas trop grande nous avons employé comme points de repère les boulons du nivellement de précision des Pays-Bas. En quelques cas nous nous sommes servi du rail du chemin de fer, dont les altitudes nous ont été procurées par l'administration à Utrecht et maintes fois nous avons employé les renseignements donnés par: „J. H. KROMHOUD, Nederland in zakformaat, 1885”, sur l'altitude du pavé auprès des gares du chemin de fer.

Puisque nous n'avions pas besoin d'une plus grande précision que 0.3 mètres les derniers renseignements étaient plus que suffisants.

Les altitudes déterminées se trouvent dans la liste de l'annexe N^o. 1.

§ 4. Détermination de la marche du chronomètre.

Les observations de pendule ont été exécutées avec le chronomètre Nardin no. 212 (Le Locle, Suisse) à temps sidéral.

Jusqu'à 1919 la marche a été déterminée par des signaux rythmés téléphoniques de l'observatoire de Leiden; depuis 1919 on a fait usage des signaux radiotélégraphiques rythmés émis par la Tour Eiffel.

A. Signaux de Leiden.

Les signaux se donnaient par le téléphone intercommunal ordinaire.

Pendant sept minutes on transmettait les battements d'une pendule astronomique à temps sidéral, et afin de pouvoir identifier la seconde on ajoutait des signaux à quinze secondes d'intervalle.

On déterminait les coïncidences des signaux avec un chronomètre auxiliaire à temps solaire (Hohwü no. 261). Les coïncidences s'espacant donc d'environ trois minutes, on en pouvait observer au moins deux pendant chaque série de signaux.

Avant et après le chronomètre auxiliaire fut comparé de la même manière au chronomètre Nardin, lequel ne se déplaçait plus après avoir été mis à sa place dans le local d'observation.

On avait fait à Leiden l'installation suivante pour l'émission des signaux :

Un chronographe avait été muni d'un microphone, qui pouvait être intercalée dans la ligne téléphonique ordinaire. Un des leviers du chronographe s'activait par la pendule astronomique KNOBLICH, l'autre par un courant fermé toutes les quinze secondes par un aide. Le choc du mouvement des leviers se transmettait au moyen du microphone.

Avant et après les signaux on comparait la pendule KNOBLICH au moyen du même chronographe à la pendule fondamentale de l'observatoire : Hohwü no. 17.

Le système des signaux à fonctionné très bien et a donné des résultats assez précis.

Nous avons pu déduire l'erreur moyenne, d'une détermination de l'heure des résultats finaux des observations de pendule (voir Chap. V § 8) et nous avons trouvé :

$$m_t = 0.030 \text{ sec.}$$

Il faut mentionner ici le concours de la directrice de la téléphonie intercommunale à Leiden, qui se donnait toujours beaucoup de peine pour donner les communications à l'heure demandée et à les maintenir sans interruptions pendant les huit minutes exigées.

Les signaux se donnaient à un intervalle de 24 heures, dans la plupart des cas au milieu de la journée.

B. *Signaux radiotélégraphiques rythmés de la Tour Eiffel.*

Nous en avons fait usage en 1919, 1920 et 1921.

En 1919 nous observions les signaux rythmés à étincelles rares, donnés à 11^h 30 Greenwich le soir, en observant directement les coïncidences avec le chronomètre NARDIN. A cette fin nous mettions l'appareil de réception près du chronomètre de sorte que celui-ci pouvait rester à sa place. En 1920 et 1921 nous observions en outre encore les signaux rythmés à étincelles musicales donnés une demi heure plus tôt c'est à dire à 11^h 0 Greenwich. L'intervalle des signaux étant trop court pour que la marche du chronomètre puisse y jouer un rôle, la comparaison des deux signaux fournissait un moyen de déter-

miner l'erreur moyenne de la réception ou plutôt la combinaison de cette erreur moyenne avec l'erreur moyenne de la réception à Paris. Nous obtenions (voir Chap. V § 8) pour le carré de l'erreur moyenne de la différence des deux signaux:

$$0.00080$$

c'est à dire que l'erreur moyenne m_0 de la réception d'un signal est

$$m_0 = \sqrt{0.00040} = 0.020 \text{ sec.}$$

donc l'erreur moyenne de la moyenne des deux signaux:

$$\sqrt{0.00020} = 0.014 \text{ sec.}$$

L'erreur moyenne totale d'une détermination de l'heure, déduite des résultats finaux des observations de pendule aux stations où nous observions pendant plus d'une journée, se trouve à:

$$m_t = 0.036 \text{ sec.}$$

En tenant compte de l'erreur moyenne de la réception des signaux on peut maintenant déduire l'erreur moyenne des données fournies par le Bureau International de l'Heure, c'est à dire les données sémi-définitives publiées au printemps de 1922, et on obtient:

$$m_d = 0.033 \text{ sec.}$$

Pour les dernières observations à de Bilt en Juin 1921 nous avons observé les signaux rythmés musicales de 11^h.0 Greenwich le matin.

§ 5. Détermination du coefficient de l'entraînement s .

Sauf en 1915 nous avons appliqué la méthode ordinaire à deux pendules (A_1 page 44 c.s.) c'est à dire qu'au commencement l'un des pendules est en repos et l'autre reçoit une certaine amplitude. Après 8, 10, 12 et 14 minutes les deux amplitudes sont déterminées et on déduit s au moyen de la formule 41 A .

En 1915 une autre méthode à deux pendules a été employée à savoir la méthode B_1 page 46 c.s., c'est à dire qu'à côté des observations ordinaires à amplitudes égales et à phases contraires nous faisons des observations à amplitudes égales et à phases égales; s se déduit ainsi de la formule 43 B .

Les deux méthodes subissent également des perturbations par les mouvements du sol, de sorte que les résultats s pour les stations qui y étaient sujettes sont beaucoup moins précis que ceux pour les autres stations (erreur moyenne de ceux-ci environ $0.5 \cdot 10^{-7}$ sec, tandis que pour les premières nous avons eu même des erreurs moyennes de $4 \cdot 10^{-7}$ sec.)

Le coefficient de l'entraînement n'entrant dans le résultat final des observations que multiplié avec un facteur très petit ou négligeable, l'erreur moyenne de ce résultat n'est pas augmentée perceptiblement par les erreurs moyennes mentionnées de s .

Nous avons ajoutées les valeurs de s à la liste des stations de l'annexe N^o. 1.

§ 6. Les observations de pendule; programme et formules.

En 1913 et 1914 on a fait les observations avec quatre pendules de bronze, Nos. 88, 89, 90 et 91 (intervalle des coïncidences ± 180 sec.), depuis avec quatre pendules d'invar, Nos. 9, 1, 11, 12 (intervalle des coïncidences ± 30 sec.)

Pendant les premières années le chronomètre avait une marche assez régulière, de sorte qu'on a cru pouvoir se dispenser de faire des observations continuelles pendant les vingt-quatre heures entre les déterminations de l'heure. On a observé pendant $3\frac{1}{2}$ heures (en 1913 en 1914 un peu moins) le matin et le soir, espérant éliminer ainsi les fluctuations journalières de la marche. D'ailleurs on n'a pas pu constater de telles fluctuations régulières, les changements qui se produisirent ayant toujours un caractère irrégulier. Afin de contrôler les erreurs qui en résultaient et de diminuer l'erreur du résultat, on a observé à toutes les stations pendant plus d'une journée. A Delft et à Leiden on a fait plus d'observations à cause de l'importance de ces stations et des mouvements du sol auxquels elles sont sujettes.

Dans le cours de 1915 et 1918 la marche devenait irrégulière; cependant on a encore maintenu le programme en ajoutant un ou deux jours d'observations partout où les durées d'oscillation trouvées trahissaient des fluctuations, jusqu'à ce qu'on disposât d'au moins une journée dont les résultats ne montraient pas de discordances.

Depuis 1919 on a écarté cette cause d'erreur en faisant des observations continuelles pendant 24 heures. A cette fin on a ajouté au programme des observations durant $\pm 8\frac{1}{2}$ heures pendant l'après-midi et pendant la nuit. On s'est contenté d'une journée d'observation aux stations ordinaires, mais on en a fait deux à la station centrale de Bilt et aux stations Helder, Haarlem et Amsterdam, où les perturbations par les mouvements du sol étaient fortes, et à Weert, où on trouvait une déviation inattendue de g qu'on voulait contrôler; à Ubagsberg en dernier lieu on en a fait trois à cause de l'importance de cette station.

Pour la détermination de la différence de Bilt—Potsdam en 1921, on a observé à de Bilt au commencement pendant six journées, séparées en deux séries de deux et quatre jours, à la fin pendant six journées consécutives et à Potsdam où la marche des pendules astronomiques était si régulière que des observations continuelles n'auraient aucun sens, pendant douze demie-journées, faisant chaque fois la moitié du programme journalier ordinaire.

En 1913 et 1914 on n'a encore fait que la moitié des observations aux stations sur terrain ferme avec les pendules oscillant ensemble suivant les méthodes du Chap. I § 5, mais les résultats de ces observations étant très satisfaisants on a adopté depuis ces méthodes pour toutes les observations.

L'application de ces méthodes était indiquée pour toutes les stations où l'influence des mouvements du sol était perceptible, mais puisqu'il faut éviter d'employer des méthodes différentes aux différentes stations d'une même tournée, afin de ne point provoquer des erreurs systématiques, nous les avons appliquées aussi aux autres stations.

Pour les observations d'une durée d'une heure on a employé la première méthode du § 5 qui est la plus simple: les pendules oscillent à amplitudes égales et à phases contraires et la moyenne des deux durées d'oscillation est libre de toute influence des mouvements du support. Cependant il n'est pas possible dans la pratique de réaliser ces conditions exactement pendant une heure, et il reste donc toujours une petite influence dont il est désirable de tenir compte. C'est possible pour cette partie des mouvements du support qui est causé par l'entraînement par le mouvement des pendules, en appliquant aux valeurs trouvées de T_1 et T_2 les réductions données par les formules 23 A et B:

$$\begin{aligned}\delta \tau_1 &= s \left[1 + \rho \cos (q_2 - q_1) \right] \\ \delta \tau_2 &= s \left[1 + \frac{1}{\rho} \cos (q_2 - q_1) \right]\end{aligned}$$

Les facteurs de s s'annulent si les conditions sont remplies exactement; dans la pratique elles ont une certaine valeur, qui cependant est très petite. On peut donc se contenter d'une valeur approximative du coefficient de l'entraînement s .

Comme nous l'avons démontré dans le § 8 Chap. I la valeur de $(T_1 - T_2)$ qui, contrastant par cela avec la moyenne des T , subit la pleine influence des mouvements du sol, peut servir à s'en faire une idée. Nous avons exécuté ce calcul dans le § 3 du Chapitre suivant.

Aux stations sur terrain meuble on ne peut obtenir ainsi une valeur juste de $T_1 - T_2$ afin de contrôler l'invariabilité des pendules. Si on y tient on peut s'en procurer une en faisant des observations spéciales à amplitudes et phases égales, puisqu'alors $T_1 - T_2$ est indépendant des perturbations. Nous ne l'avons pas jugé assez important pour justifier ces observations, puisqu'aux stations sur terrain meuble on a pourtant un contrôle par la comparaison des moyennes $\frac{1}{2} (T_1 + T_2)$ des deux paires de pendules. Pour les stations sur terrain ferme le contrôle reste complet.

Au commencement, en 1913 et 1914, on a observé ainsi chaque matin et chaque soir une série complète des quatre pendules, soit les quatre pendules à part, soit deux observations de deux pendules.

Afin d'obtenir la différence des moyennes des deux paires avec plus de précision encore, on a fait depuis 1914 chaque matin et chaque soir trois observations de deux pendules: le matin d'abord une paire, ensuite l'autre,

et dernièrement encore la première paire; le soir le même programme en échangeant les paires. On élimine ainsi le changement de la marche du chronomètre pour autant qu'il est linéaire avec le temps.

Depuis 1918 on a fait des observations consécutives pendant vingt-quatre heures. A cette fin on a maintenu le programme précédent en y ajoutant deux observations de huit heures: pendant la nuit on observait l'une des paires, pendant l'après-midi l'autre. On a agi ainsi, au lieu de faire quatre observations de six heures, pour les raisons suivantes:

1^o. Il est nécessaire de déterminer $(\tau_2 - \tau_1)$ pour chaque paire, afin de pouvoir appliquer les formules (10) ou (11) pour éliminer les mouvements du support et afin de contrôler l'invariabilité des pendules. Cette quantité n'étant pas déduisible des observations de longue durée, on était dans la nécessité d'y joindre des observations de courte durée. La différence des moyennes des deux paires aussi se déduit mieux ainsi, puisque si les observations des deux paires se suivent à un intervalle trop long les fluctuations de la marche produisent une erreur trop considérable dans cette quantité.

2^o. En maintenant pour les observations de courte durée l'ancien programme, on était à même de déduire pour ces dernières années l'erreur qu'on aurait fait en omettant les observations de longue durée et on peut ainsi juger de l'erreur moyenne adhérent par cette cause aux observations des premières années.

Le calcul des observations des dernières années commençait à chaque station par la réduction complète des observations de courte durée, de sorte qu'on obtenait $(\tau_2 - \tau_1)$ pour chaque paire. Après avoir appliqué toutes les autres réductions aux observations de longue durée, on pouvait donc calculer la différence:

$$(\delta\tau_2 - \delta\tau_1)$$

des perturbations causées par les mouvements du support. On pouvait donc appliquer alors les formules (11):

$$\left. \begin{aligned} \delta\tau_1 &= - \frac{p}{p+1} (\delta\tau_2 - \delta\tau_1) \\ \delta\tau_2 &= \frac{1}{p+1} (\delta\tau_2 - \delta\tau_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57 A)$$

pour trouver les réductions au support fixe. Dans le cas exceptionnel que p avait changé beaucoup pendant l'observation ou que $(\varphi_2 - \varphi_1)$ avait différé beaucoup de π , on a appliqué les formules plus exactes (10):

$$\begin{aligned} \delta\tau_1 &= \frac{\alpha}{2n(p+1)^2} \delta p^{2r} - \frac{p}{p+1} (\delta\tau_2 - \delta\tau_1) \\ \delta\tau_2 &= \frac{\alpha}{2n(p+1)^2} \delta p^{2r} + \frac{1}{p+1} (\delta\tau_2 - \delta\tau_1) \end{aligned}$$

où $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 - \pi$. En remarquant que:

$$\frac{\delta p^{2r}}{(p+1)^2} = -\delta \left(\frac{1}{p+1} \right)^{2r}$$

et en introduisant les différentes valeurs des constantes, ces formules deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \delta \tau_1 &= - \frac{p}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1) - 4 \frac{\alpha}{t} \left(\frac{1}{p_1+1} - \frac{1}{p_0+1} \right) \\ \delta \tau_2 &= \frac{1}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1) - 4 \frac{\alpha}{t} \left(\frac{1}{p_1+1} - \frac{1}{p_0+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (57 B)$$

où α est exprimé en degrés, t est la durée exprimée en heures, et p_0 et p_1 sont les valeurs de p au début et à la fin.

Pour les stations sur terrain meuble il était impossible de déduire $(\tau_2 - \tau_1)$ des observations de courte durée, cette quantité étant trop perturbée. On s'est contenté alors de prendre pour $(\tau_2 - \tau_1)$ la valeur à la station précédente sur terrain ferme et on n'a pas cru nécessaire de faire des observations spéciales pour la déterminer ¹⁾ puisqu'une erreur dans $(\tau_2 - \tau_1)$ n'a qu'une faible influence sur le résultat. Cela se voit si on considère la formule pour la réduction de la moyenne des deux durées d'oscillation qui en vertu de (57 A) est :

$$\frac{1}{2} (\delta \tau_1 + \delta \tau_2) = - \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p+1} \right) (\delta \tau_2 - \delta \tau_1) \quad . \quad . \quad . \quad (57 C)$$

puisque le facteur, par lequel $(\delta \tau_2 - \delta \tau_1)$ est multiplié, n'excède pas 0.06.

Pour les stations sur terrain ferme où les mouvements du support ne sont causés que par l'entraînement par les pendules, on aurait pu faire la réduction des observations de longue durée aussi à l'aide des formules 23 A et B, qui donnent en y substituant $q_2 - q_1 = \pi$:

$$\left. \begin{aligned} \delta \tau_1 &= -s(p-1) \\ \delta \tau_2 &= -s \frac{(p-1)}{p} \\ \frac{1}{2} (\delta \tau_1 + \delta \tau_2) &= -\frac{1}{2} s \frac{(p^2-1)}{p} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Les formules (57) et (58) sont toutes les deux sujettes à une erreur provenant de l'erreur de la détermination de p . Si on ne fait pas des observations intermédiaires, ce qui serait difficile la nuit, il faut prendre pour p la moyenne des valeurs initiale et finale. Il en résulte une erreur de p et cette erreur entraîne une erreur de $\frac{1}{2} (\delta \tau_1 + \delta \tau_2)$ qui est environ deux fois plus grande pour la formule (58) que pour (57). Ce résultat est confirmé par l'expérience suivante :

A la plupart des stations on a fait des observations intermédiaires de p pendant l'observation de l'après-midi. A l'aide de ces données on a calculé $\frac{1}{2} (\delta \tau_1 + \delta \tau_2)$ et on l'a fait aussi en n'employant que les valeurs initiales et finales de p . Le résultat de vingt-deux calculs fut que la formule (57) donnait une erreur moyenne de $0.2 \cdot 10^{-7}$ sec. tandis que la formule (58) en donnait

1) Ce qu'on pourrait faire en exécutant des observations à phases et à amplitudes égales.

une de $0.5 \cdot 10^{-7}$ sec. Les formules (57) sont donc préférables dans tous les cas.

L'erreur de cette réduction reste au dessous de la limite qu'on peut tolérer. Nous examinerons maintenant les erreurs des autres réductions causées par l'absence d'observations intermédiaires pendant les observations de longue durée. Il faut remarquer encore que ces erreurs ne se rapportent qu'aux observations de la nuit, puisque dans l'après-midi on a fait de temps en temps des observations des différentes quantités en question : l'amplitude, la différence des phases, la température et la pression.

Dans le § 12 du premier chapitre nous avons déjà démontré théoriquement que l'erreur moyenne de la réduction à l'amplitude zéro donnée par la formule complète $36 B$ est négligeable. L'expérience a confirmé ce résultat ; l'erreur moyenne de cette réduction déterminée des observations de l'après-midi au moyen de la manière décrite plus haut a été environ $0.1 \cdot 10^{-7}$ sec.

L'erreur moyenne de la réduction au vide est également négligeable, puisque la pression augmentait très régulièrement, de sorte que la moyenne des valeurs initiales et finales ne peut dévier beaucoup de la valeur moyenne pendant toute la durée. A une station seulement, à savoir à Zierikzee, la vitesse d'augmentation qu'on avait mesurée au commencement était considérablement plus grande que celle à la fin. On a déterminé là la moyenne pendant la durée, d'abord en partant de l'hypothèse que cette vitesse avait changé graduellement, et ensuite en supposant qu'elle avait changé d'une manière soudaine. Les deux résultats ne différant que 1.5 m.m., on n'a pas cru devoir rejeter l'observation et on s'est contenté de prendre la moyenne des deux valeurs.

L'erreur moyenne de la réduction à la température zéro aux stations où la température de la localité était sensiblement variable, était un peu plus incertaine. Pour la contrôler on a mis à ces stations un thermographe auprès de l'appareil. La différence de la réduction en prenant la moyenne des températures initiale et finale ou en employant la courbe du thermographe n'a jamais excédé $1 \cdot 10^{-7}$ sec. Il n'y a donc pas lieu à craindre des erreurs graves. Si on eût toutefois fait les observations de longue durée avec des pendules de bronze on aurait dû prendre des mesures spéciales.

Les valeurs qu'il fallait donner à p et à $(q_2 - q_1)$ afin que ces quantités changeassent le moins possible, n'ont pas été les mêmes pour toutes les stations, puisqu'elles ne dépendent pas seulement de $(\tau_2 - \tau_1)$ mais aussi du coefficient de l'entraînement s , comme il l'est démontré dans les §§ 10 et 11 du premier chapitre. Il fallait donc commencer par une détermination provisoire de s .

En employant la valeur de $(\tau_2 - \tau_1)$ à la station précédente on peut déterminer alors p et $(q_2 - q_1)$ au moyen des tableaux suivants, qui ont été calculés à l'aide des formules 34 A et B de page 35 :

$\frac{\tau_2 - \tau_1}{s}$	p_0
0.0	1.000
0.1	1.038
0.2	1.079
0.3	1.120
0.4	1.165
0.5	1.210
0.6	1.262
0.7	1.309
0.8	1.360
0.9	1.412
1.0	1.467

s	$(\varphi_2 - \varphi_1)$
30	6°.6
35	5°.7
40	4°.8
45	3°.9
50	3°.0
55	2°.1
60	1°.2

Dans la pratique la constance de p pendant les huit heures de l'observation n'a jamais été absolue, mais elle était pourtant assez satisfaisante; les changements de p dépassaient rarement 0.2. Dans les cas exceptionnels que les fluctuations étaient plus grandes on a appliqué la formule plus exacte (57 B).

Il était assez facile de réaliser au commencement les valeurs exigées de p en mettant les vis des leviers de l'amplitude à la bonne position, mais il était plus difficile d'obtenir les valeurs de $(\varphi_2 - \varphi_1)$, puisqu'il fallait tourner les leviers à un petit intervalle. Pour les observations de courte durée les conditions se réalisaient plus facilement, puisqu'alors il fallait les tourner simultanément.

L'exécution des observations à deux pendules ne montrait rien d'extraordinaire; on observait d'abord une coïncidence du premier pendule, puis deux du second, ensuite deux du premier et ainsi de suite; finissant par une coïncidence du second. On observait six ou huit coïncidences de chacun.

En faisant ainsi, on pouvait calculer la différence des phases en degrés en multipliant par $\frac{180}{c}$ la valeur de l'intervalle entre la moyenne des coïncidences de l'un et la moyenne des coïncidences de l'autre pendule; c indique ici l'intervalle des coïncidences d'un pendule; pour les pendules en bronze c était environ 180 sec. pour ceux en invar environ 30 sec.

Pour les observations de courte durée on donnait une amplitude initiale aux pendules de $\pm 25'$, pour les observations de huit heures la plus grande des deux amplitudes initiales était $\pm 45'$.

Le calcul des observations a été exécutée en 8 décimales de la seconde.

En résumant nous énumérons ici encore les formules employées pour les différentes réductions.

Réduction à l'amplitude zéro :

$$\text{Observation de courte durée:} \quad \delta \tau = \frac{\tau}{16} a_m^2$$

$$\text{Observation de longue durée:} \quad \delta \tau = \frac{\tau}{16} a_m^2 - \frac{\tau}{192} \delta a^2$$

$$\text{Réduction à la température zéro:} \quad \delta \tau = C t$$

$$\text{Réduction à pression zéro:} \quad \delta \tau = C_1 D + C_2 \sqrt{p}$$

Réduction à support rigide :

$$\text{Observation de courte durée:} \quad \delta \tau_1 = s \left[1 + p \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \right]$$

$$\delta \tau_2 = s \left[1 + \frac{1}{p} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \right]$$

$$\text{Observation de longue durée:} \quad \delta \tau_1 = - \frac{p}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1)$$

$$\delta \tau_2 = \frac{1}{p+1} (\delta \tau_2 - \delta \tau_1)$$

Afin d'éliminer les conséquences des fluctuations de la marche du chronomètre du résultat moyen d'une journée d'observation des années 1919, 1920 et 1921, nous avons donné aux résultats des observations un poids proportionnel à la durée de l'observation. Les observations antérieures, ayant eu toutes une durée à peu près égale, ont reçu le même poids.

Nous avons cru pouvoir nous dispenser d'une publication intégrale des calculs, qui se trouvent dans les archives de la commission géodésique néerlandaise à Delft. Dans le paragraphe suivant nous donnons les résultats principaux.

§ 7. Résultats des observations.

Les tableaux suivants contiennent la moyenne pour chaque journée d'observation de :

- 1^o. La moyenne des quatre durées d'oscillation après l'application de toutes les réductions.
- 2^o. La marche du chronomètre.
- 3^o. La densité de l'air.
- 4^o. La température.

La dernière colonne donne le résultat final T pour chaque station. Pour les stations où on n'a observé que deux jours, ce résultat est la moyenne des résultats de ces deux jours. Pour les stations où on a observé plus longtemps, le résultat final est déduit au moyen des formules 47 de pages 56 e. s. après y avoir substitué la valeur de β déterminée dans le chapitre suivant.

Pendules de bronze.

Station.	Année Date.	Moyenne corrigée des quatre pendules.	Marche du chron.	Densité moyenne de l'air.	Tempé- rature moy- enne.	Résultat final T .
	1913					
De Bilt.	23 Juillet	0.5012726.2	— 0.19	0.9413	14.18	0.5012734.5
	24 „	2739.7	0.00	0.9481	14.73	
	25 „	2737.6	0.00	0.9475	15.08	
Wolberg.	31 J. - 1 A.	0.5012705.4	+ 0.37	0.9404	15.48	0.5012699.5
	2 Août	2693.6	+ 0.40	0.9431	15.31	
Harikerberg.	7 Août	0.5012714.1	— 0.21	0.9468	13.16	0.5012710.5
	8-9 „	2706.9	— 0.44	0.9418	13.59	
De Bilt.	14 Août	0.5012729.6	— 0.33	0.9455	14.49	0.5012731.8
	15-16 „	2734.0	— 0.28	0.9489	14.66	
	1914					
De Bilt.	17-18 Sept.	0.5012744.4	+ 0.33	0.9322	14.57	0.5012740.4
	18-19 „	2736.4	+ 0.22	0.9344	14.38	
Sleen.	1-2 Oct.	0.5012595.4	+ 0.11	0.9538	13.05	0.5012602.3
	2-3 „	2609.2	+ 0.46	0.9600	12.25	
Groningen.	8-9 Oct.	0.5012517.2	+ 0.34	0.9507	16.12	0.5012518.0
	9-10 „	2518.9	+ 0.32	0.9470	16.32	
Leeuwarden.	14-15 Oct.	0.5012509.6	+ 0.38	0.9550	13.10	0.5012509.6
	15-16 „	2509.6	+ 0.52	0.9571	13.20	
Utrecht.	21-22 Oct.	0.5012722.4	+ 0.29	0.9575	10.88	0.5012727.1
	22-23 „	2731.8	+ 0.50	0.9542	11.30	
Delft.	27-30 Oct.	0.5012721.3	+ 0.01	0.9222	17.60	0.5012721.3
De Bilt.	4-5 Nov.	0.5012708.1	+ 0.04	0.9530	11.79	0.5012711.6
	5-6 „	2715.0	+ 0.20	0.9553	11.92	

Pendules d'invar.

Station.	Année Date.	Moyenne corrigée des quatre pendules.	Marche du chron.	Densité moyenne de l'air.	Tempé- rature moy- enne.	Résultat final T.
	1915					
De Bilt.	13-14 Juillet	0.5084429.3	— 4.61	0.9366	15.22	0.5084435.1
	14-15 „	4442.6	— 4.46	0.9326	15.30	
	15-16 „	4432.0	— 4.68	0.9363	15.05	
Leiden.	20-21 Juillet	0.5084425.0	— 4.44	0.9329	18.30	0.5084420.6
	21 „	4422.1	— 4.44	0.9329	18.80	
	22 „	4417.8	— 4.30	0.9285	18.15	
	23 „	4421.0	— 4.57	0.9237	17.58	
	23 „	4422.0	— 4.56	0.9238	18.24	
	24 „	4417.8	— 4.62	0.9246	18.83	
	24-25 „	4418.4	— 4.54	0.9270	18.25	
Schoorl.	27-28 Juillet	0.5084322.0	— 4.55	0.9315	17.10	0.5084320.0
	28-29 „	4318.0	— 4.47	0.9410	16.58	
Urk.	3-4 Août	0.5084318.8	— 4.37	0.9239	18.32	0.5084322.4
	4-5 „	4325.9	— 4.35	0.9325	18.42	
Terschelling.	11-12 Août	0.5084156.6	— 4.08	0.9293	19.56	0.5084158.0
	12-13 „	4159.3	— 4.57	0.9244	20.15	
Ameland.	16-17 Août	0.5084175.4	— 4.49	0.9328	18.10	0.5084171.8
	17-18 „	4161.2	— 4.49	0.9378	16.92	
	18-19 „	4180.6	— 4.12	0.9374	16.05	
De Bilt.	24 Août	0.5084441.3	— 4.39	0.9538	14.71	0.5084442.9
	25 „	4439.3	— 4.55	0.9532	14.73	
	26 „	4448.7	— 4.45	0.9511	14.69	
	1915					
De Bilt.	29-30 Sept.	0.5084431.2	— 4.26	0.9405	12.07	0.5084430.1
	30 S.-1 Oct.	4428.3	— 4.01	0.9493	11.81	
	1-2 Oct.	4431.3	— 3.91	0.9583	11.69	
Cocksdorp.	6-7 Oct.	0.5084207.1	— 4.19	0.9662	11.83	0.5084205.7
	7-8 „	4204.3	— 4.30	0.9581	12.09	
Enkhuizen.	12-13 Oct.	0.5084317.1	— 4.41	0.9552	12.46	0.5084319.0
	13-14 „	4320.9	— 4.27	0.9597	12.57	
Harlingen.	19-20 Oct.	0.5084228.3	— 3.73	0.9697	10.41	0.5084230.7
	20-21 „	4235.3	— 3.46	0.9697	10.02	
	21-22 „	4227.7	— 3.56	0.9742	9.24	
Leeuwarden.	27-28 Oct.	0.5084221.3	— 3.13	0.9707	6.93	0.5084225.8
	28-29 „	4230.1	— 3.08	0.9746	6.02	
	29-30 „	4225.3	— 3.31	0.9785	6.23	

Station.	Année Date.	Moyenne corrigée des quatre pendules.	Marche du chron.	Densité moyenne de l'air,	Tempé- rature moy- enne.	Résultat final Z.
Amersfoort.	2-3 Nov.	0.5084427.3	— 4.38	0.9334	14.29	0.5084428.4
	3-4 „	4429.6	— 4.36	0.9396	14.82	
De Bilt.	9-10 Nov.	0.5084446.0	— 4.45	0.9401	9.59	0.5084440.4
	10-11 „	4437.7	— 4.45	0.9470	9.43	
	11-12 „	4438.0	— 4.44	0.9412	9.38	
Amersfoort.	22 Nov.	0.5084413.0	— 4.54	0.9611	14.66	0.5084418.6
	23 „	4421.7	— 4.63	0.9521	15.42	
	24 „	4420.7	— 4.64	0.9483	16.44	
1918						
De Bilt.	8-11 Juillet	0.5084455.0	— 2.14	0.9398	14.35	0.5084455.0
Assen.	16-18 Juillet	0.5084292.8	— 4.17	0.9436	13.96	0.5084292.8
Steenwijk.	7-9 Août	0.5084286.0	— 3.35	0.9406	16.34	0.5084286.0
Hollander.	24-26 Août	0.5084381.5	— 3.08	0.9436	14.98	0.5084381.5
Winterswijk.	3-5 Sept.	0.5084469.0	— 3.03	0.9478	13.11	0.5084469.0
De Steeg.	21-22 Sept.	0.5084490.7	— 2.87	0.9365	14.57	0.5084491.0
	22-23 „	4495.0	— 2.87	0.9246	14.79	
	23-24 „	4486.5	— 3.01	0.9353	14.01	
Oss.	16-17 Oct.	0.5084549.3	— 2.73	0.9477	11.42	0.5084548.6
	17-18 „	4548.0	— 2.73	0.9558	10.97	
Gorinchem.	28-29 Oct.	0.5084521.1	— 2.96	0.9692	11.74	0.5084522.4
	29-30 „	4523.8	— 3.05	0.9666	12.03	
De Bilt.	11-12 Nov.	0.5084458.8	— 2.43	0.9763	9.94	0.5084457.1
	12-13 „	4457.4	— 2.09	0.9834	9.30	
	13-14 „	4455.2	— 2.13	0.9812	9.38	
1919						
De Bilt.	6-7 Nov.	0.5084446.6	— 3.08	0.0738	5.94	0.5084446.6
Oud-Beijerland	13 Nov.	0.5084499.8	— 3.60	0.0803	2.97	0.5084499.8
Zierikzee.	16 Nov.	0.5084548.9	— 3.11	0.0720	0.90	0.5084548.9
Middelburg.	24 Nov.	0.5084583.4	— 2.96	0.0515	6.65	0.5084583.4

Station.	Année Date.	Moyenne corrigée des quatre pendules.	Marche du chron.	Densité moyenne de l'air.	Tempé- rature moy- enne.	Résultat final <i>T</i> .
Ter Neuzen.	26 Nov.	0.5084633.1	— 2.85	0.0688	3.78	0.5084633.1
Bergen op Zoom.	9 Déc.	0.5084594.8	— 2.56	0.0759	4.91	0.5084594.8
Breda.	11 Déc.	0.5084592.2	— 2.49	0.0464	4.67	0.5084592.2
Ede.	21 Déc.	0.5084490.4	— 2.94	0.0675	6.87	0.5084490.4
De Bilt.	28 Déc.	0.5084458.2	— 3.13	0.0662	6.02	0.5084454.0
	29 „	4449.7	— 3.45	0.0610	6.30	
	1920					
De Bilt.	1 Juin	0.5084453.4	+ 1.28	0.0721	13.42	0.5084452.4
	2 „	4451.3	+ 1.27	0.1161	13.50	
Sambeek.	17 Juin	0.5084577.5	+ 0.92	0.0730	17.20	0.5084577.5
Ubagsberg.	19 Juin	0.5084866.7	+ 0.88	0.0754	16.94	0.5084865.2
	29 „	4862.5	+ 0.80	0.0564	19.05	
	30 „	4867.0	+ 0.87	0.0655	18.75	
Maastricht.	6 Juillet	0.5084783.0	+ 1.29	0.0549	17.27	0.5084783.0
Sittard.	8 Juillet	0.5084761.0	+ 1.06	0.0586	15.56	0.5084761.0
Weert.	18 Juillet	0.5084732.0	+ 1.33	0.0650	18.06	0.5084728.7
	19 „	4725.4	+ 1.31	0.0644	17.38	
Oirschot.	21 Juillet	0.5084654.5	+ 1.34	0.0584	16.77	0.5084654.5
Blerick.	28 Juillet	0.5084645.3	+ 1.52	0.0534	17.49	0.5084645.3
Deurne.	30 Juillet	0.5084652.0	+ 1.68	0.0593	14.64	0.5084652.0
De Bilt.	6 Août	0.5084454.8	+ 1.46	0.0712	14.77	0.5084455.1
	7 „	4455.4	+ 1.70	0.0488	14.66	
	1920-21					
De Bilt.	20-21 Oct.	0.5084455.8	+ 2.20	0.0463	8.76	0.5084455.8
Winschoten.	27 Oct.	0.5084249.0	+ 1.57	0.0552	12.97	0.5084249.0
Hoogeveen.	29-30 Oct.	0.5084341.2	+ 2.26	0.0652	7.74	0.5084341.2
Heerenveen.	7 Nov.	0.5084254.2	+ 2.12	0.0483	7.18	0.5084254.2
Buitenpost.	9 Nov.	0.5084241.6	+ 2.62	0.0439	5.60	0.5084241.6
Workum.	20 Nov.	0.5084261.4	+ 2.65	0.0467	4.11	0.5084261.4

Station.	Année Date.	Moyenne corrigée des quatre pendules.	Marche du chron.	Densité moyenne de l'air.	Tempé- rature moy- enne.	Résultat final T.
Helder.	23 Nov.	0.5084272.8	+ 2.15	0.0419	7.62	0.5084274.4
	24 "	4276.0	+ 2.15	0.0530	7.43	
Hoorn.	1 Déc.	0.5084344.5	+ 2.18	0.0462	9.08	0.5084344.5
Haarlem.	3 Déc.	0.5084396.9	+ 2.04	0.0521	7.58	0.5084397.7
	6 "	4398.5	+ 2.43	0.0496	7.57	
Amsterdam.	13 Déc.	0.5084395.1	+ 2.19	0.0425	7.68	0.5084399.8
	14 "	4404.6	+ 2.35	0.0507	7.60	
Gouda.	17 Déc.	0.5084457.7	+ 2.74	0.0797	-0.92	0.5084457.7
Oldenzaal.	23 Déc.	0.5084417.0	+ 2.94	0.0729	2.91	0.5084417.0
	23-24 "	4416.9	+ 2.72	0.0555	2.67	
Apeldoorn.	29 Déc.	0.5084432.8	+ 2.90	0.0635	8.42	0.5084432.8
De Bilt.	12 Janvier	0.5084452.6	+ 2.16	0.0605	8.82	0.5084454.0
	13 "	4455.4	+ 2.06	0.0444	9.00	
	1921					
De Bilt.	23 Mars	0.5084455.8	+ 2.31	0.0506	8.70	0.5084454.6
	24 "	4452.2	+ 2.11	0.0424	9.04	
	5 Avril	4454.1	+ 2.07	0.0436	8.90	
	6 "	4453.9	+ 2.02	0.0424	8.95	
	7 "	4450.5	+ 2.01	0.0430	8.87	
	8 "	4460.8	+ 2.15	0.0507	8.78	
Potsdam.	22,23 Avril	0.5084433.2	+ 0.09	0.0537	8.31	0.5084432.4
	25,26 "	4430.6	+ 0.12	0.0450	8.32	
	27,28 "	4432.7	+ 0.13	0.0413	8.60	
	29,30 "	4431.7	+ 0.09	0.0404	8.77	
	1,3 Mai	4432.2	+ 0.10	0.0421	9.00	
	4,5 "	4434.0	+ 0.10	0.0397	9.01	
De Bilt.	30-31 Mai	0.5084457.5	+ 1.85	0.0498	12.87	0.5084453.1
	31-1 Juin	4454.4	+ 1.76	0.0484	13.46	
	1-2 "	4448.9	+ 1.86	0.0468	13.85	
	2-3 "	4452.8	+ 1.48	0.0453	14.61	
	3-4 "	4454.1	+ 1.56	0.0476	14.93	
	4-5 "	4454.1	+ 1.56	0.0469	15.10	

La deuxième série de tableaux, que nous faisons suivre ci-après, contient des données concernant les différences des quatre durées d'oscillation, qui peuvent servir à se faire une opinion sur la variabilité des pendules, et dont nous ferons usage dans le chapitre suivant pour déduire les erreurs moyennes des observations et la valeur moyenne des mouvements du sol.

Les tableaux contiennent :

La moyenne à chaque station de la différence des durées d'oscillation de la première paire de pendules qui ont oscillé ensemble ; nous désignerons cette différence par v . La deuxième colonne donne le nombre d'observations à chaque station dont cette moyenne est déduite, et la troisième colonne l'erreur moyenne qui s'ensuit pour une détermination de v .

Il est clair que v est indépendante des fluctuations de la marche du chronomètre, mais elle subit la pleine influence des mouvements du sol. C'est pourquoi nous ne donnons pas la moyenne de v pour les stations où ces perturbations étaient si considérables, que cette moyenne n'aurait aucune valeur réelle. L'erreur moyenne pour ces stations-ci, qui est donc beaucoup plus grande qu'aux stations sur terrain ferme, a été calculée en prenant pour base la valeur de v à la station précédente sur terrain ferme ; elle nous servira plus tard à déduire la grandeur des mouvements du sol.

Les trois colonnes suivantes contiennent les mêmes quantités pour la deuxième paire de pendules.

Des trois dernières colonnes la première donne la moyenne à chaque station de la différence des moyennes des deux paires de pendules. Nous désignerons cette différence par w . La seconde colonne donne de nouveau le nombre d'observations dont cette moyenne est déduite et la troisième l'erreur moyenne qui en résulte pour une détermination de w .

Chaque valeur de w est déduite des trois observations consécutives d'un matin ou d'un soir en prenant la moyenne de la première et de la troisième observation et en en soustrayant la seconde. Pour 1913 et 1914 on n'avait fait que deux observations chaque matin et chaque soir, dont on a pris directement la différence.

La différence w est indépendante des mouvements du sol, puisque la durée d'oscillation moyenne de deux pendules oscillant ensemble en est indépendante. On s'en rend compte en remarquant que l'erreur moyenne pour les stations qui y sont sujettes (par exemple : Schoorl, Delft, Ameland, Helder, Amsterdam, Haarlem, Hoorn etc.) n'est guère plus grande que pour les stations situées sur terre ferme.

w subit naturellement bien l'influence des fluctuations de la marche pendant le soir et le matin ; mais un changement linéaire avec le temps en est

éliminé par suite de la méthode de déduction de chaque valeur des trois observations consécutives.

Si on désire savoir les différences des quatre durées d'oscillation de la moyenne des quatre, on les déduit aisément en prenant $\frac{1}{2}(w \pm v)$.

Pendules de bronze.

Différences des durées d'oscillation.

Station.	Année Date.	$T_{88} - T_{90}$ (moyenne).	Nombre d'observations	Erreur moyenne d'une observation.	$T_{89} - T_{91}$ (moyenne).	Nombre d'observations	Erreur moyenne d'une observation.	$\frac{T_{88} + T_{90} - T_{89} - T_{91}}{2}$ (moyenne).	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.
		10^{-7} sec.			10^{-7} sec.			10^{-7} sec.		
1913										
De Bilt.	23-25 Juillet	161.2	4	4.5	9.0	4	9.5	287.0	4	22.7
Wolberg.	31 J.-2 Août	193.4	2	44.4	14.5	2	3.8	308.4	2	21.9
Harikerberg.	7-8 Août	169.3	3	6.1	9.3	4	4.9	297.0	4	3.6
De Bilt.	14-15 Août	161.7	3	5.2	5.7	2	4.1	288.0	2	2.2
1914										
De Bilt.	17-19 Sept.	163.2	2	12.0	— 1.8	2	3.6	290.0	2	3.3
Sleen.	1-3 Oct.	187.1	2	13.6	— 7.4	2	4.9	290.5	2	1.8
Groningen.	8-10 Oct.	154.8	2	8.1	8.2	2	0.6	292.9	2	1.8
Leeuwarden.	14-16 Oct.	158.6	4	9.8	0.2	4	31.0	294.2	4	3.0
Utrecht.	21-23 Oct.	158.4	4	6.0	10.6	4	7.9	297.4	4	3.8
Delft.	27-30 Oct.	180.0	12	17.9	10.4	12	26.9	283.9	12	12.4
De Bilt.	4-6 Nov.	187.2	2	5.4	10.3	2	6.5	293.6	2	0.9

Pendules d'invar.

Différences des durés d'oscillation.

Station.	Année Date.	$T_{12} - T_1$ (moyenne),	Nombre d'observations	Erreur moyenne d'une observation.	$T_9 - T_{11}$ (moyenne),	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.	$\frac{T_{12} + T_1}{2} - \frac{T_9 + T_{11}}{2}$ (moyenne),	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.
	1915	10^{-7} sec.		10^{-7} sec.	10^{-7} sec.		10^{-7} sec.	10^{-7} sec.		10^{-7} sec.
De Bilt.	13-16 Juillet	- 0.1	4	7.5	17.0	4	7.1	194.4	4	9.0
Leiden.	20-25 Juillet		14	12.3		14	23.6	199.2	13	2.8
Schoorl.	27-29 Juillet		6	35.1		6	32.1	199.2	4	6.7
Urk.	3-5 Août		6	13.0		6	9.6	192.9	4	5.0
Terschelling.	11-13 Août		6	9.4		6	14.8	195.5	4	3.6
Ameland.	16-19 Août		9	10.5		9	40.9	199.4	6	9.2
De Bilt.	24-26 Août	- 0.9	9	3.5	13.4	9	3.8	191.3	6	7.9
	1915									
De Bilt.	29 S.-2 Oct.	+ 0.3	9	3.3	8.8	9	5.4	193.9	6	7.3
Cocksdorp.	6-8 Oct.		6	16.6		6	15.6	197.9	4	5.5
Enkhuizen.	12-14 Oct.		6	14.6		6	15.7	195.4	4	3.5
Harlingen.	19-22 Oct.		9	18.2		9	13.8	195.6	6	3.1
Leeuwarden.	27-30 Oct.	+ 6.3	9	8.3	8.2	9	9.3	192.1	6	4.5
Amersfoort.	2-4 Nov.	+ 4.0	6	4.5	1.9	6	4.7	191.5	4	2.2
De Bilt.	9-12 Nov.	- 0.8	9	6.5	11.0	9	8.8	191.7	6	4.9
Amersfoort.	22-24 Nov.	+ 7.8	9	5.9	9.8	9	5.3	198.3	6	2.8
	1918									
De Bilt.	8-11 Juillet	25.0	9	2.3	29.2	9	2.4	194.8	6	1.1
Assen.	16-18 Juillet	14.1	6	5.8	26.2	6	3.3	187.8	4	1.8
Steenwijk.	7-9 Août	15.0	4	3.2	16.6	4	2.9	188.6	4	2.3
Hollander.	24-26 Août	16.7	6	3.1	25.4	6	4.0	188.6	4	5.0
Winterswijk.	3-5 Sept.	14.2	6	2.0	22.7	6	5.1	188.6	4	3.1
De Steeg.	21-24 Sept.	24.7	9	4.0	18.8	9	2.4	192.1	6	4.1
Oss.	16-18 Oct.	19.2	6	2.1	22.3	6	13.6	194.6	4	7.8
Gorinchem.	28-30 Oct.	22.3	6	10.0	30.5	6	4.1	188.6	4	2.8
De Bilt.	11-14 Nov.	19.6	9	4.4	28.9	9	5.1	190.2	6	3.7
	1919									
De Bilt.	6-7 Nov.	19.7	6	2.1	32.4	6	3.5	184.2	4	7.2
Oud-Beijerland.	13 Nov.	32.1	3	1.1	27.6	3	3.3	194.6	2	5.1
Zierikzee.	16 Nov.	29.0	3	7.4	24.2	3	6.3	196.2	2	1.3
Middelburg.	24 Nov.	28.9	3	1.4	33.7	3	5.7	192.0	2	0.9

Station.	Année Date.	$T_{12} - T_1$ (moyenne).	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.	$T_9 - T_{11}$ (moyenne).	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.	$\frac{T_{12} + T_1}{2} - \frac{T_9 + T_{11}}{2}$ (moyenne)	Nombre d'observations.	Erreur moyenne d'une observation.
Ter Neuzen.	26 Nov.	30.1	3	5.0	27.7	3	8.3	182.3	2	13.4
Bergen op Zoom.	9 Déc.	24.0	3	5.0	31.2	3	2.3	188.1	2	10.0
Breda.	11 Déc.	21.3	3	1.1	37.5	3	6.7	202.4	2	11.1
Ede.	21 Déc.	23.0	3	1.8	35.6	3	3.5	188.4	2	10.0
De Bilt.	28-29 Déc.	29.5	6	3.0	31.3	6	2.3	196.7	4	5.6
1920										
De Bilt.	1-2 Juin	24.7	6	4.6	31.5	6	1.9	195.0	4	1.3
Sambeek.	17 Juin	21.8	3	1.8	38.9	3	1.6	195.0	2	0.0
Ubagsberg.	19,29-30 Juin	24.1	9	4.8	28.1	9	1.6	193.0	6	3.4
Maastricht.	6 Juillet	17.6	3	2.0	32.0	3	1.9	196.5	2	6.1
Sittard.	8 Juillet	17.3	3	3.3	26.2	3	0.0	193.2	2	11.9
Weert.	18-19 Juillet	19.1	6	3.9	30.6	6	2.6	193.6	4	2.9
Oirschot.	21 Juillet	20.7	3	1.5	28.8	3	1.5	192.9	2	1.0
Blerick.	28 Juillet	26.4	3	4.5	23.5	3	3.6	198.0	2	1.4
Deurne.	30 Juillet	20.7	3	2.7	23.3	3	3.3	198.8	2	0.0
De Bilt.	6-7. Août	25.6	6	4.0	34.6	6	6.0	192.1	4	3.1
1920-21										
De Bilt.	20-21 Oct.	22.0	5	1.8	32.3	6	4.2	193.5	4	3.7
Winschoten.	27 Oct.	41.8	3	2.7	32.5	3	0.6	198.0	2	1.4
Hoogeveen.	29-30 Oct.	23.6	4	2.6	33.7	3	3.3	195.4	2	2.0
Heerenveen.	7 Nov.	28.1	3	3.2	28.6	3	4.0	197.4	2	2.0
Buitenpost.	9 Nov.	29.1	3	2.1	28.9	3	3.8	194.7	2	0.0
Workum.	20 Nov.	33.5	3	5.5	26.4	3	5.6	200.4	2	0.5
Helder.	23-24 Nov.		6	37.1		6	13.0	197.0	4	1.5
Hoorn.	1 Déc.		3	17.9		3	9.2	195.4	2	4.2
Haarlem.	3, 6 Déc.		6	29.0		6	34.0	197.2	4	3.7
Amsterdam.	13-14 Déc.		6	36.4		6	42.0	194.5	4	4.8
Gouda.	17 Déc.		3	12.1		3	10.8	201.6	2	0.5
Oldenzaal.	23-24 Déc.	26.4	4	1.7	29.7	4	1.6	203.1	3	8.2
Apeldoorn.	29 Déc.	35.7	3	2.5	34.2	3	1.0	201.6	2	8.3
De Bilt.	12-13 Janv.	31.7	6	2.0	31.6	6	2.4	196.9	4	5.3
1921										
De Bilt.	23-25 Mars } 5-8 Avril }	32.6	18	3.7	31.2	18	3.3	197.8	13	2.5
Potsdam	22 Av.-5 Mai	28.8	18	3.0	35.7	18	3.3	194.3	12	3.9
De Bilt.	30 Mai-5 Juin	32.0	16	3.4	31.0	17	3.3	197.7	12	3.7

CHAPITRE V.

Les erreurs moyennes.

§ 1. Analyse de l'erreur dans la détermination de la différence de g entre deux stations.

Cette erreur est causée par les erreurs dans la détermination de la moyenne des quatre durées d'oscillation à chacune des deux stations et par un changement éventuel des pendules pendant le transport.

La variabilité des pendules peut se présenter de trois manières :

1^o. Les pendules peuvent changer systématiquement et tous de la même manière pendant le voyage, soit qu'il y ait un changement moléculaire lent avec le temps, indépendant du transport, soit que ce changement soit causé par les petites secousses inévitables pendant le voyage. Nous verrons plus tard que les observations ne donnent pas lieu à soupçonner un changement de la seconde espèce, tandis que les variations de la première espèce ont été trop lentes pour être perceptibles pendant une tournée.

2^o. Les pendules restent invariables à chaque station, mais il y a une différence irrégulière, d'un caractère accidentel, entre les durées d'oscillation à différentes stations, qui diffère pour les quatre pendules. Un tel changement pourrait être occasionné par un petit changement de position des couteaux, ou bien par un changement moléculaire irrégulier causé par les secousses du transport. Pour éviter autant que possible la première cause, nous avons remis les pendules de nouveau après chaque journée d'observation, (excepté aux premières stations : Wolberg, Harikerberg, Sleen, Groningen et Leeuwarden). Nous avons dû y renoncer depuis que nous avons observé dans le vide, à cause de la difficulté de rétablir le vide pendant un temps court. Un petit changement s'est presque toujours produit comme nous le verrons plus tard.

3^o. Les pendules subissent un changement continu et irrégulier, aussi bien pendant les observations à une station, que pendant l'intervalle. Un tel changement n'est pas très probable, mais pourrait cependant se produire, quand par exemple les couteaux changeraient leur forme d'une manière irrégulière par suite des oscillations.

L'erreur moyenne dans la détermination de la durée d'oscillation à une station peut se déduire, puisque nous avons observé à la plupart des stations pendant plus d'une journée et que nous n'avons pas fait seulement

des déterminations de l'heure au commencement et à la fin, mais aussi entre les différentes journées d'observation, de sorte qu'on peut obtenir un résultat complet pour chaque journée.

Cependant les résultats des différentes journées à une station n'étant pas indépendants, à cause des déterminations médianes de l'heure qui servent au calcul des deux marches adjacentes, on ne peut pas en déduire directement l'erreur moyenne. Nous avons démontré dans le § 14 du premier chapitre qu'afin de pouvoir résoudre le problème, il faut savoir le rapport de l'erreur moyenne des déterminations de l'heure et de l'ensemble des autres erreurs. A cette fin il nous faut faire une étude plus approfondie des différentes erreurs avant de faire la déduction finale. Cela fournira en même temps le moyen d'étudier la variabilité des pendules, les mouvements du sol, etc.

L'erreur totale de la durée d'oscillation corrigée se compose de l'erreur de l'observation de la durée elle-même et des erreurs dans les réductions, c'est à dire :

1^o. L'erreur dans la réduction pour la marche du chronomètre.

Elle est occasionnée par l'erreur de la détermination de la marche, qui se compose encore de deux parties: l'une causée par l'erreur des deux déterminations de l'heure, qui ont servi à déduire la marche moyenne pendant l'intervalle, l'autre causée par la différence entre cette marche moyenne et la marche pendant les observations. Cette erreur disparaît dans la moyenne des observations, quand ces observations se suivent sans interruption pendant tout l'intervalle entre les déterminations de l'heure. Quand les observations ne sont faites que pendant une partie de l'intervalle, cette cause d'erreur se maintient.

2^o. L'erreur dans la réduction à l'amplitude zéro :

Cette erreur est causée par l'erreur de la détermination de l'amplitude, provenant d'abord de l'erreur dans l'observation de l'amplitude et ensuite de l'écart qu'il y a entre la valeur moyenne des observations faites au commencement et à la fin et la valeur moyenne pendant toute la durée, ou plutôt la valeur moyenne des carrés, puisque c'est le carré de l'amplitude qui entre dans la formule de la réduction. Cette dernière cause d'erreur est négligeable pour les observations de pendule de courte durée, pour celles de longue durée elle ne peut atteindre qu'une petite valeur (voir page 84).

3^o. L'erreur dans la réduction à la température zéro :

Cette erreur est causée par :

a. L'erreur dans la détermination de la température, provenant de la même manière de l'erreur de l'observation et de l'écart entre la valeur moyenne des observations et la valeur moyenne pendant toute la durée. Cet écart n'a d'importance que pour les observations de longue durée.

L'effet de cette erreur est presque négligeable pour les pendules en invar,

puisque la constante de la température n'est que $3.8 \cdot 10^{-7}$ sec. environ. Pour les pendules de bronze elle pourra atteindre des valeurs assez considérables, la constante étant environ $48 \cdot 10^{-7}$ sec de sorte qu'une erreur d'une centième de degré dans la température occasionne déjà une erreur de $0.5 \cdot 10^{-7}$ sec. dans la réduction.

b. L'erreur dans la constante de la température.

L'effet de cette erreur a un caractère systématique, puisqu'il ne dépend que de la température à chaque station.

4^o. L'erreur dans la réduction à pression zéro.

Cette réduction se compose de deux termes, un proportionnel à la pression et un à la racine carrée de la pression. De même que pour l'erreur précédente, cette erreur est causée par :

a. L'erreur dans la détermination de la pression de l'air provenant des erreurs de l'observation et de l'écart entre la valeur moyenne des observations et la valeur moyenne pendant toute la durée. Cet écart n'a une valeur appréciable que pour les observations de longue durée.

Cette erreur n'a que peu d'importance, puisqu'un millimètre de pression ne change la réduction que de $1 \cdot 10^{-7}$ sec. au plus pour les observations faites à petite pression, et de $0.8 \cdot 10^{-7}$ sec. pour celles faites à pression d'atmosphère.

b. Les erreurs dans les deux constantes, qui occasionneront une erreur systématique, dépendant de la pression à chaque station. Pour éviter une trop grande influence de cette erreur, nous n'avons jamais fait des observations à petite pression et à pression d'atmosphère pendant la même tournée. Il faut remarquer que les erreurs des deux constantes n'étant pas indépendantes, il faut tenir compte de la relation entre les deux pour calculer l'erreur de la réduction totale qui s'ensuit.

5^o. L'erreur dans la réduction au support rigide.

Elle se calcule d'une manière différente pour les observations de courte durée et pour celles de longue durée (formules page 86). L'erreur de la correction provient des erreurs dans les quantités entrant dans ces formules.

On démontre facilement que dans le premier cas l'erreur est parfaitement négligeable; l'erreur dans le coefficient de l'entraînement s par exemple est multipliée par un facteur si petit qu'elle n'a plus d'influence. Dans le deuxième cas elle pourra atteindre des valeurs plus grandes, qui sont occasionnées par :

a. L'erreur dans la détermination de $(\delta \tau_2 - \delta \tau_1)$. Cependant le facteur $\frac{1}{2} \frac{(\rho - 1)}{(\rho + 1)}$ par laquelle elle est multipliée (form. 57c) étant relativement petit (0.06 au plus) l'influence est encore assez restreinte.

b. L'erreur du facteur $\frac{1}{2} \frac{(\rho - 1)}{(\rho + 1)}$. On pourra négliger ici l'influence des petites erreurs dans l'observations de ρ , mais généralement l'erreur causée par l'écart de la valeur observée (la moyenne des observations au commen-

gement et à la fin) et la valeur moyenne pendant toute la durée, quoique petite, ne sera pas tout à fait négligeable, puisque la durée est si grande (voir page 83).

6°. L'erreur provenant des perturbations de la durée d'oscillation par les mouvements du sol. Cette erreur est éliminée de la moyenne des observations, puisque nous avons appliqué les méthodes déduites dans le chapitre I § 5 en faisant osciller deux pendules à la fois. La différence des durées des pendules oscillant ensemble en subit toutefois pleinement l'influence.

De toutes les erreurs énumérées, il y en a trois qui ont une influence prépondérante :

1°. La variabilité des pendules.

2°. L'erreur de la marche du chronomètre.

3°. La perturbation par les mouvements du sol en ce qui regarde la différence des durées d'oscillation de pendules oscillant ensemble.

Pour les pendules de bronze il s'y joint encore l'erreur de la détermination de la température.

Les autres erreurs ont une influence beaucoup plus petite. A l'exception des erreurs des constantes de la température et de la densité de l'air (3^b et 4^b) dont nous considérerons l'influence plus tard, elles ont toutes principalement un caractère accidentel et pour les différents pendules elles sont indépendantes l'une de l'autre. Nous supposons que la partie systématique de ces erreurs est négligeable.

Nous les examinerons ensemble et nous y joindrons encore l'erreur causée par une variabilité éventuelle des pendules de la troisième espèce, c'est à dire une variabilité d'un caractère tout à fait accidentel, et nous nommerons m la valeur moyenne de ce total pour une détermination de la durée d'oscillation qui a duré une heure. C'est donc l'erreur moyenne de la durée d'oscillation d'un pendule non perturbé par les mouvements du sol, après l'application de toutes les réductions sauf celle de la marche.

Si m n'était causé que par l'erreur dans l'observation de la durée d'oscillation elle-même, l'erreur moyenne pour des durées d'observation plus grandes serait en proportion inverse de cette durée. Cependant d'autres influences occasionneront une augmentation de l'erreur, comme par exemple l'écart qu'il y a entre les moyennes de l'amplitude, de la température, de la densité de l'air et du facteur de $(\partial \tau_2 - \partial \tau_1)$ pendant toute la durée, et la moyenne des observations de ces quantités au commencement et à la fin.

Nous tiendrons compte de ces influences en posant que l'erreur moyenne est en raison inverse non pas de la durée elle-même, mais de la racine carrée de la durée. Cette supposition est assez arbitraire, mais nous croyons pouvoir l'accepter, puisque l'erreur considérée m n'a pourtant qu'une importance

secondaire pour le calcul de l'erreur totale, comme nous l'avons remarqué plus haut. La seule partie de m pour laquelle cette remarque paraît incertaine, est celle causée par la variabilité des pendules, mais pour cette partie de l'erreur la supposition paraît très acceptable. La supposition simplifie d'ailleurs le calcul, puisque maintenant nous pouvons mettre que l'erreur dans le résultat d'un ensemble de déterminations de la durée d'oscillation d'un pendule pendant un temps t est

$$m\sqrt{t}$$

indépendamment de l'arrangement des observations; il en est de même par exemple si nous avons fait une observation de t heures ou bien t observations d'une heure.

Nous examinerons maintenant ce que les observations nous peuvent apprendre par rapport à m et aux autres erreurs plus importantes, c'est à dire celles de la marche, de la variabilité des pendules de la première et seconde espèce et des mouvements perturbateurs du sol.

**§ 2. Analyse des erreurs moyennes des déterminations de v ,
c'est à dire de la différence des durées d'oscillation de deux pen-
dules oscillant ensemble, à une même station.**

Cette erreur est indépendante des variations des pendules pendant le transport, c'est à dire des variations de la première et de la seconde espèce. En outre, si la station se trouve sur terrain ferme, il n'y a pas de mouvements du sol, et en dernier lieu on peut négliger l'erreur systématique causée par une erreur dans les constantes de la température ou de la densité de l'air, d'autant plus que généralement la température et la pression ne se modifiaient que peu pendant les observations à une station. Il ne reste donc que les mêmes causes d'erreurs, qui contribuent à m , c'est à dire que l'erreur moyenne d'une détermination de cette différence à la valeur

$$m\sqrt{2}$$

si toutefois la détermination dure environ une heure. Autrement il faut encore ajouter un facteur \sqrt{t} . Nous avons donc trouvé par là un moyen de déterminer m . Les valeurs des erreurs moyennes que nous avons trouvées aux différentes stations sont réunies dans le tableau de pages 93 e.s. Nous en prenons celles des stations sur terrain ferme et nous leur donnerons un poids proportionnel aux nombre d'observations, qui ont servi à leur détermination.

Pendules d'invar.

Année.	Date.	Station.	g Poids	ρ_1 , carré de l'erreur moy. de $T_{12} - T_1$	ρ_2 , carré de l'erreur moy. de $T_{11} - T_3$	$g \rho_1$	$g \rho_2$
				10 ⁻⁷ sec.	10 ⁻⁷ sec.		
1915 I	13-16 Juillet.	De Bilt.	4	56.8	50.2	227	201
	24-26 Août.	De Bilt.	9	12.0	14.7	108	132
1915 II	29 Sept.-2 Oct.	De Bilt.	9	11.1	29.3	100	264
	2-4 Nov.	Amersfoort.	6	20.4	21.7	122	130
	9-12 Nov.	De Bilt.	9	41.9	77.0	377	693
	22-24 Nov.	Amersfoort.	9	35.0	28.3	315	255
		Total . . .	46			1249	1675
1918	8-11 Juillet.	De Bilt.	9	5.3	5.9	48	53
	16-18 Juillet.	Assen.	6	33.9	10.6	203	64
	7-9 Août.	Steenwijk.	4	10.3	8.4	41	34
	24-26 Août.	Hollander.	6	9.6	16.1	58	97
	3-5 Sept.	Winterswijk.	6	3.9	37.7	23	226
	21-24 Sept.	De Steeg.	9	16.1	5.6	145	50
	11-14 Nov.	De Bilt.	9	19.8	25.6	178	231
1919	6-7 Nov.	De Bilt.	6	4.5	12.6	27	76
	9 Déc.	Bergen op Zoom.	3	24.8	5.4	74	16
	11 Déc.	Breda.	3	1.3	44.8	4	134
	21 Déc.	Ede.	3	3.4	12.0	10	36
	28-29 Déc.	De Bilt.	6	9.2	5.5	55	33
1920 I	1-2 Juin.	De Bilt.	6	20.7	3.8	124	23
	17 Juin.	Sambeek.	3	3.3	2.6	10	8
	19-30 Juin.	Ubagsberg.	9	23.4	2.5	210	22
	6 Juillet.	Maastricht.	3	4.2	3.8	13	11
	8 Juillet.	Sittard.	3	11.2	0.0	34	0
	18-19 Juillet.	Weert.	6	15.2	6.7	91	40
	21 Juillet.	Oirschot.	3	2.2	2.2	7	7
	28 Juillet.	Blerick.	3	19.8	12.9	59	39
	30 Juillet.	Deurne.	3	7.4	10.8	22	32
	6-7 Août.	De Bilt.	6	15.8	35.9	95	215
1920 II	20-21 Oct.	De Bilt.	6	3.4	17.3	20	104
	27 Oct.	Winschoten.	3	7.3	0.4	22	1
	29-30 Oct.	Hoogeveen.	3	7.0	10.8	21	32
	23-24 Déc.	Oldenzaal.	4	2.9	2.7	12	11
	29 Déc.	Apeldoorn.	3	6.3	1.0	19	3
1921	12-13 Jan.	De Bilt.	6	3.9	5.8	23	35
	23 Mars-8 Avr.	De Bilt.	18	13.6	11.0	245	198
	22 Avr.-5 Mai.	Potsdam.	18	9.3	10.6	168	191
	30 Mai-5 Juin.	De Bilt.	17	11.6	10.8	197	184
		Total . . .	193			2258	2206

On peut remarquer que les valeurs de l'erreur moyenne en 1915 sont plus grandes que celles des années suivantes. La cause est peut-être que les pendules étant neufs, ils étaient sujets à des variations de la troisième espèce, qui ont disparu depuis.

Nous verrons plus tard que cette supposition est confirmée par les observations à de Bilt. Nous calculerons donc l'erreur moyenne séparément pour les deux périodes :

$$\text{Le carré de l'erreur moyenne de } (T_{12} - T_1) \text{ en 1915} = \frac{1249}{46} = 27.1$$

$$\text{Le carré de l'erreur moyenne de } (T_{11} - T_9) \text{ en 1915} = \frac{1675}{46} = 36.4.$$

Donc en prenant la moyenne des deux on trouve pour m^2 (pendules d'invar en 1915) :

$$m^2 = \frac{1}{2} \times 31.8 = 15.9.$$

$$\text{Le carré de l'erreur moyenne de } (T_{12} - T_1) \text{ en 1918/21} = 11.7$$

$$\text{Le carré de l'erreur moyenne de } (T_{11} - T_9) \text{ en 1918/21} = 11.4$$

donc on trouve pour m^2 (pendules d'invar en 1918/21) :

$$m^2 = \frac{1}{2} \times 11.6 = 5.8.$$

Pendules de bronze.

Année.	Date.	Station.	g Poids	\hat{p}_1 , carré de l'erreur moy. de $T_{12} - T_1$	\hat{p}_2 , carré de l'erreur moy. de $T_{11} - T_9$	$g \hat{p}_1$	$g \hat{p}_2$
1913	23-25 Juillet.	De Bilt.	4	20.2	90.2	81	361
	31 Juill.-2 Août	Wolberg.	2	1972	14.6	3944	29
	7-8 Août.	Harikerberg.	3	37.7	24.1	113	72
1914 I	14 Août.	De Bilt.	3	27.2	16.8	82	50
	16 Juillet.	De Bilt.	2	0.0	4.0	0	8
1914 II	23-24 Juillet.	Sambeek.	2	23.9	15.6	48	31
	17-18 Sept.	De Bilt.	2	144.4	13.0	289	26
	1-2 Oct.	Sleen.	2	184.4	23.8	369	48
	9-10 Oct.	Groningen.	2	66.1	0.4	132	1
	4-5 Nov.	De Bilt.	2	29.6	42.4	59	85
		Total . . .	24			5117	714

Donc le carré de l'erreur moyenne de $T_{88} - T_{90} = \frac{5117}{24} = 213.3$

et le carré de l'erreur moyenne de $T_{89} - T_{91} = \frac{711}{24} = 29.6$

Nous trouvons donc pour m^2 (pendules de bronze):

$$m^2 = \frac{1}{2} \times 121.4 = 60.7$$

m est donc beaucoup plus grande pour les pendules de bronze que pour ceux d'invar. On ne peut attribuer cette différence qu'à deux causes:

1^o. L'erreur de la détermination de la température a une influence douze fois plus grande pour les pendules de bronze que pour ceux d'invar.

2^o. La présence d'une variabilité des pendules de bronze de la troisième espèce.

Il est impossible de choisir entre ces deux explications sans faire des observations spéciales. Il faut toutefois remarquer que le calcul de m^2 pour les pendules de bronze ne repose que sur un nombre assez restreint d'observations, de sorte que le résultat n'a pas la même valeur que celui pour les pendules d'invar.

§ 3. Détermination des mouvements du sol.

Aux stations qui sont sujettes à des mouvements du sol cette influence se joint aux autres erreurs de v . Aussi on trouve la perturbation moyenne qui en résulte, en soustrayant $2 m^2$ de l'erreur moyenne totale de v , pour laquelle nous prenons la moyenne de celles pour les deux paires de pendules. La relation entre cette perturbation et les mouvements du sol est donnée par la formule (16) page 22:

$$\left[\delta (T_2 - T_1)_t \right] = \frac{2 G T'}{g a \sqrt{2 t}} = 0.00178 G$$

(t = durée de l'observation = 1 heure)

où G est une valeur moyenne, qui ne dépend que des mouvements du sol:

$$G = \text{mod } \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t y_0'' e^{-iut} dt.$$

G est donc du même ordre que l'accélération horizontale y_0'' ou bien que le déplacement y_0 lui-même.

Nous donnons les résultats pour les différentes stations dans le tableau suivant, où nous avons multiplié G par 10000; la formule de 10000 G est la même que celle de G si on exprime y_0'' ou y_0 en microns au lieu de centimètres. Ayant observé que la valeur des perturbations dépend plus ou moins de la force du vent, nous avons ajouté encore la vitesse moyenne V du vent pendant les observations, et nous donnons dans la dernière colonne le quotient $10000 \frac{G}{V}$.

Station.	Carré de l'erreur moy. de $v - z$ m^2	10000 G	V en mètres	10000 $\frac{G}{V}$
Ameland	1360	21	5.4	3.8
Terschelling	122	6	2.3	2.7
Cocksdoorp	228	8	2.4	3.5
Harlingen	228	8	3.0	2.8
Leeuwarden I	403	11	4.8	2.4
Leeuwarden II	46	4	3.5	1.1
Buitenpost	0	0	4.9	0.0
Workum	19	2	3.2	0.8
Heerenveen	1	1	3.6	0.2
Helder	759	15	4.2	3.7
Schoorl	1100	19	6.5	2.9
Hoorn	191	8	4.5	1.7
Enkhuizen	199	8	2.2	3.6
Urk	98	6	4.1	1.4
Haarlem	986	18	9.2	1.9
Amsterdam	1512	22	5.8	3.8
Leiden	322	10	6.5	1.6
Delft	401	11	6.0	1.9
Gouda	120	6	4.0	1.5
Utrecht	0	0	5.2	0.0
Gorinchem	46	4	3.6	1.1
Oud-Beyerland	0	0	4.8	0.0
Zierikzee	36	3	4.8	0.7
Middelburg	5	1	9.5	0.1
Terneuzen.	36	3	7.0	0.5

Nous avons réuni ces résultats dans la carte de l'annexe 5.¹⁾ Il va sans dire qu'il n'est pas permis d'y attacher trop d'importance, puisque les chiffres ne donnent qu'une idée des mouvements du sol pendant les observations, donc pendant une ou deux journées. Elles peuvent donc très bien s'écarter des valeurs moyennes pendant une plus longue durée. Les chiffres pour les deux séries d'observation à Leeuwarden en 1914 et 1915 montrent par exemple une différence assez grande. Il faudrait faire beaucoup plus d'obser-

1) La station Oss est située sur terrain ferme, mais n'ayant pu trouver un endroit favorable, nous avons dû nous contenter d'un lieu d'observation peu propice près d'une usine. En effet 10000 G a eu là une valeur de 5, mais puisqu'il faut l'attribuer probablement à des causes purement locales, nous ne l'avons pas fait entrer dans la liste ou dans la carte.

vations (si c'est possible simultanément à différents endroits) pour pouvoir en tirer des conclusions plus sûres.

Cependant on peut remarquer qu'en général les chiffres augmentent en s'approchant de la mer du Nord, de sorte qu'il y a lieu de croire qu'au moins en partie les mouvements du sol sont causés par l'action de la mer. De plus, en confirmation de cette hypothèse, on a pu constater que les perturbations étaient plus grandes aux jours de grand vent qu'aux jours calmes. C'est pourquoi nous avons noté dans la liste la vitesse moyenne du vent pendant les observations, et nous avons ajouté encore dans la dernière colonne le rapport $10000 \frac{G}{V}$ afin d'obtenir des valeurs caractérisant la mobilité du sol, qui dépendent un peu moins des conditions particulières du vent.

L'augmentation de la mobilité vers la mer est indépendante de la consistance du sol: les perturbations par exemple à Schoorl, à Helder et à Ameland, sont très grandes, quoique les observations aient été faites sur des terrains sablonneux très stables par elle-même. En examinant la carte on serait porté à croire à une diminution de la mobilité du sol vers le sudouest. Cette diminution pourrait s'expliquer peut-être par le fait que les couches tertiaires sont là plus près de la surface que plus au nord.

En concluant on peut donc affirmer que les mouvements du sol, au moins pour la plus grande partie, n'ont pas un caractère purement local, dépendant de la consistance du sol et des causes locales superficielles, mais qu'ils dépendent principalement de l'action de la mer.

§ 4. Analyse de l'erreur moyenne des valeurs moyennes de v aux différentes stations d'une même tournée.

En comparant les valeurs moyennes on peut se faire une idée des variations des pendules pendant le transport.

Remarquons d'abord qu'il n'y a pas eu pendant aucun voyage un changement systématique de v , ce qui d'ailleurs se comprend bien, puisqu'une variation systématique des pendules, c'est à dire une variation de la première espèce, si elle se produisait, serait probablement égale pour tous. Il n'y a jamais eu non plus de changement de v brusque et durable qui aurait trahi une variation d'un des pendules par un accident ou par quelque autre cause. Les changements de v ont eu un caractère accidentel, ce qui indique une variation des pendules de la même espèce et indépendante pour les quatre pendules (variation de la seconde espèce). Le carré de l'erreur moyenne totale de v pendant un voyage est donc égal à

$$2 b^2 + \frac{2 m^2}{n}$$

où b est la déviation moyenne d'un pendule de sa durée moyenne, et n est le nombre d'observations de v à chaque station, de sorte que $\frac{2 m^2}{n}$ est le carré de l'erreur moyenne de v provenant des autres erreurs.

On peut donc en déduire b . Il va sans dire qu'il faut écarter toutes les stations où il y a des perturbations par les mouvements du sol.

Nous faisons suivre ici la détermination de b .

I. Pendules de bronze.

Année.	Station.	$\frac{2 m^2}{n}$	$T'_{88} T'_{90}$	$x x$	$T'_{89} - T'_{91}$	$x x$
1913	De Bilt.	30.4	161.2	104.0	9.0	0.4
	Wolberg.	60.7	193.4	484.0	14.5	24.0
	Harikerberg.	30.4	169.3	4.4	9.3	0.1
	De Bilt.	40.5	161.7	94.1	5.7	15.2
	Moyenne . . .		171.4		9.6	
1914	De Bilt.	60.7	168.6	0.6	8.7	22.1
	Sambeck.	60.7	155.2	201.9	5.2	1.4
	De Bilt.	60.7	163.2	38.4	— 1.8	33.6
	Sleen.	60.7	187.1	313.3	— 7.4	130.0
	Groningen.	60.7	154.8	213.3	8.2	17.6
	De Bilt.	60.7	187.2	317.0	10.3	39.7
	Moyenne . . .		169.4		4.0	
Total . . .		526.2		1771.0		284.1

$$\text{Pour } T'_{88} - T'_{90} : 2 b^2 = \frac{1771.0}{8} - \frac{526.2}{10} = 169$$

$$\text{Pour } T'_{89} - T'_{91} : 2 b^2 = \frac{284.1}{8} - \frac{526.2}{10} = 0$$

Pour la paire $T'_{88} - T'_{90}$ on trouve donc $2 b^2 = 169$, mais pour la paire $T'_{89} - T'_{91}$ on ne peut démontrer de variabilité. Il faut toutefois remarquer que le nombre de stations est trop petit, et par la même cause la valeur de m^2 trop incertaine, pour pouvoir attacher beaucoup d'importance à ce résultat. Ceci n'est pas le cas pour les pendules d'invar, le nombre de stations étant beaucoup plus grand.

II. Pendules d'invar.

Année et numéro de la tournée.	Station.	$\frac{2 m^2}{n}$	$T_{12}-T_1$	$x x$	$T_{11}-T_9$	$x x$
1915 I	De Bilt.	8.0	— 0.1	0.2	17.0	3.2
	De Bilt.	3.5	— 0.9	0.2	13.4	3.2
	Moyenne . . .		— 0.5		15.2	
1915 II	De Bilt.	3.5	0.3	6.2	8.8	0.8
	Amersfoort.	5.3	4.0	1.4	1.9	36.0
	De Bilt.	3.5	— 0.8	13.0	11.0	9.6
	Amersfoort.	3.5	7.8	25.0	9.8	3.6
	Moyenne . . .		2.8		7.9	
1918	De Bilt.	1.3	25.0	42.2	29.2	27.0
	Assen.	1.9	14.1	19.4	26.2	4.8
	Steenwijk.	2.9	15.0	12.2	16.6	54.8
	Hollander.	1.9	16.7	3.2	25.4	2.0
	Winterswijk.	1.9	14.2	18.5	22.7	1.7
	De Steeg.	1.3	24.7	38.4	18.8	27.0
	De Bilt.	1.3	19.6	1.2	28.9	24.0
	Moyenne . . .		18.5		24.0	
1919	De Bilt.	1.9	19.7	14.4	32.4	1.4
	Bergen op Zoom.	3.9	24.0	0.2	31.2	5.8
	Breda.	3.9	21.3	4.8	37.5	15.2
	Ede.	3.9	23.0	0.2	35.6	4.0
	De Bilt.	1.9	29.5	36.0	31.3	5.3
	Moyenne . . .		23.5		33.6	
1920 I	De Bilt.	1.9	24.7	8.4	31.5	2.9
	Sambeek.	3.9	21.8	0.0	38.9	82.8
	Ubagsberg.	1.3	24.1	5.3	28.1	0.6
	Maastricht.	3.9	17.6	17.6	32.0	4.8
	Sittard.	3.9	17.3	20.2	26.2	13.0
	Weert.	1.9	19.1	7.3	30.6	0.6
	Oirschot.	3.9	20.7	1.2	28.8	1.0
	Blerick.	3.9	26.4	21.1	23.5	39.7
	Deurne.	3.9	20.7	1.2	23.3	42.2
	De Bilt.	1.9	25.6	14.4	34.6	23.0
Moyenne . . .		21.8		29.8		

1920 II	De Bilt.	1.9	22.0	67.2	32.3	0.0
	Winschoten.	3.9	41.8	134.7	32.5	0.0
	Hoogeveen.	2.9	23.6	43.5	33.7	2.0
	Oldenzaal.	2.9	26.4	14.4	29.7	6.8
	Apeldoorn.	3.9	35.7	30.2	34.2	3.6
	De Bilt.	1.9	31.7	2.2	31.6	0.5
	Moyenne . . .		30.2		32.3	
1921	De Bilt.	0.6	32.6	2.2	31.2	2.0
	Potsdam.	0.6	28.8	5.3	35.7	9.6
	De Bilt.	0.7	32.0	0.8	31.0	2.6
	Moyenne . . .		31.1		32.6	
Total des pages 107 et 108		105.0		633.9		467.1

$$\text{Pour } T_{12} - T_1: 2b^2 = \frac{633.9}{30} - \frac{105.0}{37} = 18.3.$$

$$\text{Pour } T_{11} - T_9: 2b^2 = \frac{467.1}{30} - \frac{105.0}{37} = 12.7.$$

Pour la paire $T_{12} - T_1$ on trouve donc $2b^2 = 18.3$ et pour la paire $T_{11} - T_9: 2b^2 = 12.7$.

$$\begin{array}{lll} \text{Résultat: } 88 - 90 & b^2 = 84 & b = 9.2 \\ & 89 - 91 & = 0 \quad b = 0 \\ & 12 - 1 & = 9.2 \quad b = 3.0 \\ & 11 - 9 & = 6.4 \quad b = 2.5 \end{array}$$

Si on désigne l'écart moyen de la moyenne T des quatre pendules par b_r on a

$$\text{Pendules d' bronze } b_r^2 = \frac{84 + 0}{8} = 10.5 \quad b_r = 3.2.$$

$$\text{Pendules d' invar } b_r^2 = \frac{9.2 + 6.4}{8} = 2.0 \quad b_r = 1.4.$$

Puisque T à de Bilt se déduit pour chaque voyage de deux valeurs: la valeur initiale et la valeur finale, le carré de l'erreur moyenne est $\frac{1}{2} b_r^2$.

Il en résulte donc une erreur moyenne b_Δ dans la différence dT de T à une station de la tournée et à de Bilt:

$$\text{Pendules en bronze: } b_\Delta^2 = 1.5 b_r^2 \quad b_\Delta = 4.0 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

$$\text{Pendules en invar: } b_\Delta^2 = 1.5 b_r^2 \quad b_\Delta = 1.7 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

C'est donc une erreur qui est loin d'être négligeable.

Nous faisons remarquer encore une fois que les valeurs de b pour les pendules de bronze sont assez incertaines.

§ 5. Analyse des erreurs moyennes des déterminations de w à une même station.

Nous posons w la différence des moyennes T_p des deux paires de pendules, observées consécutivement; elle doit être indépendant des perturbations par les mouvements du sol.

Pour prouver que la théorie à cet égard s'accorde bien avec les faits, nous faisons suivre ici séparément les erreurs moyennes de w pour les stations sur terrain ferme et pour celles qui ont subi les plus grandes perturbations. Nous avons déterminé la valeur moyenne des erreurs pour les deux séries en donnant à chaque valeur de l'erreur moyenne un poids proportionnel au nombre d'observations de w dont elle est déduite. (Voir tableau page 110).

Nous trouvons dans les deux cas la même valeur moyenne pour m_w^2 :

$$m_w^2 = 24.0$$

donc w est en effet indépendant des mouvements du sol. ¹⁾

Le même resultat se trouve pour les pendules de bronze; seulement le nombre des stations est trop petit pour obtenir une valeur certaine pour m_w^2 :

Pendules de bronze.

$$\text{Erreurs moyennes de } w = \frac{T_{89} + T_{91} - T_{88} + T_{90}}{2}$$

Pas de mouvements du sol.					Mouvements du sol très grands.				
Année	Station.	g	m_w^2	$g m_w^2$	Année	Station.	g	m_w^2	$g m_w^2$
1913	De Bilt.	4	516.0	2064	1914	Leeuwarden.	4	8.8	35
	Wolberg.	2	477.6	955		Utrecht.	4	14.2	57
	Harikerberg.	4	12.7	51		Delft.	12	153.3	1840
	De Bilt.	2	4.8	10				20	
1914	De Bilt.	2	18.6	37				$m_w^2 =$	97
	Sambeek.	2	5.8	12					20
	De Bilt.	2	11.1	22					
	Sleen.	2	3.4	7					
	Groningen.	2	3.4	7					
	De Bilt.	2	0.8	2					
		24		3167					
			$m_w^2 =$	132					

1) Nous pouvons ajouter que dans le cas où notre supposition quant à l'effet des mouvements du sol aurait été fautive et que les perturbations subies par deux pendules oscillant ensemble auraient été indépendantes, nous aurions dû trouver en partant des erreurs moyennes de v une erreur moyenne $m_w^2 = 320$ pour les stations meubles.

Pendules d'invar.

$$\text{Erreurs moyennes de } w = \frac{T_{11} + T_9}{2} - \frac{T_{12} + T_1}{2}.$$

Pas de mouvements du sol.					Mouvements du sol très grands.				
Année No. de la tournée.	Station.	g poids	m_w^2	$g m_w^2$	Année No. de la tournée.	Station.	g poids	m_w^2	$g m_w^2$
1915 I	De Bilt.	4	80.2	321	1915 I	Leiden.	13	7.9	102
	De Bilt.	6	61.9	371		Schoorl.	4	44.7	179
1915 II	De Bilt.	6	53.6	322	1915 II	Ameland.	6	84.9	509
	Amersfoort.	4	4.9	20		Cocksloorp.	4	30.8	123
1918	De Bilt.	6	24.4	146	1920 II	Enkhuizen.	4	12.2	49
	Amersfoort.	6	7.6	46		Harlingen.	6	9.6	58
1919	De Bilt.	6	1.3	8	1920 II	Helder.	4	2.3	9
	Assen.	4	3.2	13		Haarlem.	4	13.6	54
	Steenwijk.	4	5.2	21	Amsterdam.	4	22.6	90	
	Hollander.	4	25.1	100			49		1173
	Winterswijk.	4	9.8	39				$m_w^2 =$	24.0
	De Steeg.	6	17.2	103					49
	De Bilt.	6	14.0	84					
	De Bilt.	4	52.2	109					
	Bergen op Zoom.	2	100.8	202					
	Breda.	2	123.2	246					
1920 I	Ede.	2	99.4	199					
	De Bilt.	4	31.7	127					
	De Bilt.	4	1.8	7					
	Sambeek.	2	0.0	0					
	Ubagsberg.	6	11.8	71					
	Maastricht.	2	37.0	74					
	Sittard.	2	141.0	282					
	Weert.	4	8.4	34					
	Oirschot.	2	1.0	2					
	Blerick.	2	2.0	4					
1920 II	Deurne.	2	0.0	0					
	De Bilt.	4	9.4	38					
	De Bilt.	4	13.3	53					
	Winschoten.	2	2.0	4					
	Hoogeveen.	2	4.0	8					
	Oldenzaal.	3	67.6	203					
	Apeldoorn.	2	68.4	137					
	De Bilt.	4	27.8	111					
	De Bilt.	13	6.2	81					
	Potsdam.	12	15.5	186					
1921	De Bilt.	12	14.0	168					
		164		3940					
			$m_w^2 =$	24.0					

Dans l'étude suivante de m_w^2 nous ne ferons donc plus de différence entre les stations sur terrain ferme et celles sur terrain meuble.

La quantité w subit d'abord l'influence des erreurs d'observation etc. de chaque durée d'oscillation, dont nous avons désigné la valeur moyenne par m , et ensuite les conséquences des changements de marche entre les observations des deux paires de pendules. Afin d'éliminer autant que possible ces conséquences nous avons répété depuis 1915 l'observation de la première paire après l'observation de la seconde, de sorte que tout changement linéaire avec le temps peut être éliminé.

Afin de se pouvoir faire une idée des changements irréguliers de la marche nous supposons que ces changements ont tous un caractère purement accidentel et nous désignerons par c la valeur moyenne de la différence qui s'ensuit pour deux durées d'oscillation observées consécutivement (durée des observations une heure):

$$\text{Avant 1915 l'erreur moyenne totale de } w = \frac{T_{90} + T_{88}}{2} - \frac{T_{91} + T_{89}}{2}$$

est donc donnée par:

$$m_w^2 = c^2 + m^2$$

$$\text{et depuis celle de } w = \frac{T_{11} + T_9 + T_{11}' + T_9'}{4} - \frac{T_{12} + T_1}{2}$$

par:

$$m_w^2 = \frac{1}{2} c^2 + \frac{3}{4} m^2.$$

Nous en pouvons donc déduire c .

L'irrégularité de la marche du chronomètre a augmenté très sensiblement avec le temps, de sorte qu'en 1918 et 1919 elle était beaucoup plus grande qu'au commencement, mais puisqu'en 1918 nous avons toujours poursuivi les observations jusqu'à ce que nous eussions deux journées consécutives pendant lesquelles les observations ne trahissaient pas de grands changements de marche, la valeur de c qui s'ensuit de ces observations n'est pas plus grande que pour les années précédentes. En 1919 nous n'y avons plus fait attention, puisque nous avons introduit des observations de pendule ininterrompues entre les déterminations de l'heure, au lieu de pendant sept heures par jour, de sorte que les changements de marche ne nuisirent plus au résultat. Aussi les observations de 1919 donnent une valeur de c beaucoup plus grande. Au commencement de 1920 le chronomètre a été repassé à la fabrique Nardin à Le Locle, avec un bon résultat, puisque depuis la marche était redevenue régulière.

Pour la déduction de c nous divisons donc les observations en trois parties: 1^o. celles d'avant 1919, 2^o. celles de 1919 et 3^o. celles depuis 1919.

Nous donnons encore à chaque valeur de m_w^2 un poids proportionnel au nombre d'observations dont elle est déduite.

10. Observations de 1913, 1914, 1915, 1918.

Année No. de la tournée	Station.	g poids	m_w^2	gm_w^2	gm^2 resp. $\frac{3}{4} gm^2$	g resp. $\frac{1}{2} g$
1913 II	De Bilt.	4	516.0	2064	243	4
	Wolberg.	2	477.6	955	121	2
	Harikerberg.	4	12.7	25	243	4
1914	De Bilt.	2	4.8	10	121	2
	De Bilt.	4	18.6	74	243	4
	Sambeek.	2	5.8	12	121	2
	De Bilt.	2	11.1	22	121	2
	Sleen.	2	3.4	7	121	2
	Groningen.	2	3.4	7	121	2
	Leeuwarden.	4	8.8	35	243	4
	Utrecht.	4	14.2	57	243	4
	Delft.	12	153.3	1840	729	12
	De Bilt.	2	0.8	2	121	2
	1915 I	De Bilt.	4	80.2	321	64
Leiden.		13	7.9	103	207	13
Schoorl.		4	44.7	179	48	2
Urk.		4	25.2	101	48	2
Terschelling.		4	13.3	53	48	2
Ameland.		6	84.9	509	72	3
1915 II	De Bilt.	6	61.9	371	72	3
	De Bilt.	6	53.6	322	72	3
	Cocksdoorp.	4	30.8	123	48	2
	Enkhuizen.	4	12.2	49	48	2
	Harlingen.	6	9.6	58	72	3
	Leeuwarden.	6	20.0	120	72	3
	Amersfoort.	4	4.9	20	48	2
	De Bilt.	6	24.4	146	72	3
1918	Amersfoort.	6	7.6	46	72	3
	De Bilt.	6	1.3	8	26	3
	Assen.	4	3.2	13	17	2
	Steenwijk.	4	5.2	21	17	2
	Hollander.	4	25.1	100	17	2
	Winterswijk.	4	9.8	39	17	2
	De Steeg.	6	17.2	103	26	3
	Oss.	4	60.5	242	17	2
	Gorinchem.	4	7.8	31	17	2
	De Bilt.	6	14.0	84	26	3
	Total . . .			8272	4034	117

$$c^2 = \frac{8272 - 4034}{117} = 36.2 \quad c = 6.0$$

Le changement de marche correspondant à $c = 6.0$ est 0.10 sec.

2°. Observations de 1919.

Année No. du voyage	Station.	g	m_{ω}^2	gm_{ω}^2	$\frac{3}{4} gm^2$	$\frac{1}{2} g$
1919	De Bilt.	4	52.2	109	17	2
	Oud-Beijerland.	2	26.0	52	9	1
	Zierikzee.	2	1.6	3	9	1
	Middelburg.	2	0.8	2	9	1
	Terneuzen.	2	180.4	361	9	1
	Bergen op Zoom.	2	100.8	202	9	1
	Breda.	2	123.2	246	9	1
	Ede.	2	99.4	199	9	1
	De Bilt.	4	31.7	127	17	2
	Total . . .			1301	97	11

$$c^2 = \frac{1301 - 97}{11} = 109.5 \quad c = 10.5$$

Le changement de marche correspondant à $c = 10.5$ est 0.18 sec.

3°. Observations de 1920, 1921.

Année No. du voyage.	Stations.	g	m_{ω}^2	gm_{ω}^2	$\frac{3}{4} gm^2$	$\frac{1}{2} g$	
1920 I.	De Bilt.	4	1.8	7	17	2	
	Sambeek.	2	0.0	0	9	1	
	Ubagsberg.	6	11.8	71	26	3	
	Maastricht.	2	37.0	74	9	1	
	Sittard.	2	141.0	282	9	1	
	Weert.	4	8.4	34	17	2	
	Oirschot.	2	1.0	2	9	1	
	Blerick.	2	2.0	4	9	1	
	Deurne.	2	0.0	0	9	1	
	De Bilt.	4	9.4	38	17	2	
	1920 II	De Bilt.	4	13.3	53	17	2
		Winschoten.	2	2.0	4	9	1
		Hoogeveen.	2	4.0	8	9	1
		Heerenveen.	2	4.2	8	9	1
Buitenpost.		2	0.0	0	9	1	
Workum.		2	0.3	1	9	1	
Helder.		4	2.3	9	17	2	
Hoorn.		2	17.4	35	9	1	
Haarlem.		4	13.6	54	17	2	
Amsterdam.		4	22.6	90	17	2	
Gouda.		2	0.3	1	9	1	
1921	Oldenzaal.	3	76.6	203	13	1.5	
	Apeldoorn.	2	68.4	137	9	1	
	De Bilt.	4	27.8	111	17	2	
	De Bilt.	13	6.2	81	57	6.5	
	De Bilt.	12	14.0	168	52	6	
	Total . . .			1475	410	47	

$$c^2 = \frac{1457 - 410}{47} = 22.7 \quad c = 4.8$$

Le changement de marche correspondant à $c = 4.8$ est 0.08 sec.

Il ne faut pas attacher trop d'importance à ces valeurs puisque la supposition que l'irrégularité de la marche a un caractère purement accidentel n'est probablement qu'une approximation peu exacte de la réalité. Cependant elles peuvent donner une idée des changements moyens de la marche pendant une heure. En outre nous en ferons usage pour la déduction suivante et pour la détermination de l'erreur moyenne occasionnée par l'écart entre la marche moyenne pendant les sept heures d'observations par jour et la marche déduite des déterminations de l'heure distancées de vingt quatre heures.

Cet écart a la valeur :

$$\begin{aligned} + \frac{1}{24} (T_1 + T_2 + \dots + T_{24}) - \frac{1}{6} (T_1 + T_2 + \dots + T_6) &= \\ &= - \frac{3}{24} (T_1 + T_2 + \dots + T_6) + \frac{1}{24} (T_7 + T_8 + \dots + T_{24}) \end{aligned}$$

où $T_1 \dots T_{24}$ sont les durées d'oscillation corrigées pour la marche. En acceptant la supposition de l'indépendance des variations de la marche par heure on trouve donc pour le carré de la valeur moyenne de cet écart :

$$\begin{aligned} d^2 &= 6 \times \frac{9}{576} c^2 + 18 \times \frac{1}{576} c^2 = \frac{1}{8} c^2 = 4.5 \text{ en } 1913-1918 \\ &= 13.7 \text{ en } 1919 \\ &= 2.8 \text{ en } 1920 \text{ et } 1921. \end{aligned}$$

§ 6. Analyse de l'erreur moyenne des valeurs moyennes de w aux différentes stations d'une même tournée.

Cette erreur est évidemment aussi bien indépendante des mouvements du sol que la précédente, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de faire une différence entre les stations sur terrain ferme et celles sur terrain meuble.

L'erreur se compose d'une part de toutes les erreurs d'observation et des conséquences de l'irrégularité de la marche, occasionnant ensemble une erreur moyenne de m_w dans chaque observation, donc de $\frac{m_w}{\sqrt{n}}$ dans la moyenne à une station (n étant le nombre des déterminations de w à cette station) et d'autre part de l'influence des variations des pendules pendant le transport.

Quant à cette influence-ci on en peut faire les mêmes remarques que nous avons faites par rapport aux quantités v (page 105) : les valeurs de w ne montrent pas de variations systématiques comme on peut le voir en examinant la liste qui suit ; les variations ont un caractère purement accidentel. En introduisant de nouveau b c.à.d. la déviation moyenne d'un pendule de sa durée d'oscillation moyenne, on trouve pour l'erreur moyenne totale de w :

avant 1915 :
$$M_{\omega}^2 = \frac{m_{\omega}^2}{n} + b^2 = \frac{c^2}{n} + \frac{m^2}{n} + b^2$$

depuis :
$$= \frac{c^2}{2n} + \frac{3}{4} \frac{m^2}{n} + b^2.$$

On peut donc en déduire une valeur pour b^2 . Nous faisons suivre ici cette détermination.

Pendules de bronze.

Année	Station.	$\frac{c^2}{n}$	$\frac{m^2}{n}$	τ	M_{ω}^2
1913	De Bilt.	9.0	15.2	287.0	65.6
	Wolberg.	18.1	30.4	308.4	177.0
	Harikerberg.	9.0	15.2	297.0	3.6
	De Bilt.	18.1	30.4	288.0	50.4
	Moyenne . . .			295.1	
1914	De Bilt.	18.1	30.4	288.4	6.2
	Sambeck.	18.1	30.4	287.3	13.0
	De Bilt.	18.1	30.4	290.0	0.8
	Sleen.	18.1	30.4	290.5	0.2
	Groningen.	18.1	30.4	292.9	4.0
	Lecwarden.	9.0	15.2	294.2	10.9
	Utrecht.	9.0	15.2	297.4	42.2
	Delft.	3.0	5.1	283.9	49.0
	De Bilt.	18.1	30.4	293.6	7.3
	Moyenne . . .			290.9	
Total . . .	183.8	309.1		430.2	

$$b^2 = \frac{430.2}{11} - \frac{183.8 + 309.1}{13} = 1.2.$$

$$b = 1.1.$$

Pendules d'invar.

Année No. du voyage.	Station.	$\frac{c^2}{2n}$	$\frac{3m^2}{4n}$	w	M_w^2
1915 I	De Bilt.	9.0	4.0	194.4	2.6
	Leiden.	2.8	1.2	199.2	10.2
	Schoorl.	4.5	3.0	199.2	10.2
	Urk.	4.5	3.0	192.9	9.6
	Terschelling.	4.5	3.0	195.5	0.2
	Ameland.	3.0	2.0	199.4	11.6
	De Bilt.	3.0	2.0	191.3	22.1
	Moyenne . . .			196.0	
1915 II	De Bilt.	3.0	2.0	193.9	0.5
	Cocksloep	4.5	3.0	197.9	10.9
	Enkhuizen.	4.5	3.0	195.4	0.6
	Harlingen.	3.0	2.0	195.6	1.0
	Leeuwarden.	3.0	2.0	192.1	6.2
	Amersfoort.	4.5	3.0	191.5	9.6
	De Bilt.	3.0	2.0	191.7	8.4
	Amersfoort.	3.0	2.0	198.3	15.2
Moyenne . . .			194.6		
1918	De Bilt.	3.0	0.7	194.8	19.4
	Assen.	4.5	1.1	187.8	6.8
	Steenwijk.	4.5	1.1	188.6	3.2
	Hollander.	4.5	1.1	188.6	3.2
	Winterswijk.	4.5	1.1	188.6	3.2
	De Steeg.	3.0	0.7	192.1	2.9
	Oss.	4.5	1.1	194.6	17.6
	Gorinchem.	4.5	1.1	188.6	3.2
	De Bilt.	3.0	0.7	190.2	0.0
Moyenne . . .			190.4		
1919	De Bilt.	13.7	1.1	184.2	56.2
	Oud-Beijerland.	27.4	2.2	194.6	8.4
	Zierikzee.	27.4	2.2	196.2	20.2
	Middelburg.	27.4	2.2	192.0	0.1
	Terneuzen.	27.4	2.2	182.3	88.3
	Bergen op Zoom.	27.4	2.2	188.1	13.0
	Breda.	27.4	2.2	202.4	114.4
	Ede.	27.4	2.2	188.4	10.9
	De Bilt.	13.7	1.1	196.7	25.0
Moyenne . . .			191.7		

1920 I	De Bilt.	2.8	1.1	195.0	0.0
	SambEEK.	5.7	2.2	195.0	0.0
	Ubagsberg.	1.9	0.7	193.0	3.2
	Maastricht.	5.7	2.2	196.5	2.9
	Sittard.	5.7	2.2	193.2	2.6
	Weert.	2.8	1.1	193.6	1.4
	Oirschot.	5.7	2.2	192.9	3.6
	Blerick.	5.7	2.2	198.0	10.2
	Deurne.	5.7	2.2	198.8	16.0
	De Bilt.	2.8	1.1	192.1	7.3
	Moyenne . . .			194.8	
1920 II	De Bilt.	2.8	1.1	193.5	16.8
	Winschoten.	5.7	2.2	198.0	0.2
	Hoogeveen.	5.7	2.2	195.4	4.8
	Heerenveen.	5.7	2.2	203.1	30.2
	Buitenpost.	5.7	2.2	201.6	16.0
	Workum.	5.7	2.2	196.9	0.5
	Helder.	2.8	1.1	197.4	0.0
	Hoorn.	5.7	2.2	194.7	8.4
	Haarlem.	2.8	1.1	200.4	7.8
	Amsterdam.	2.8	1.1	197.0	0.4
	Gouda.	5.7	2.2	195.4	4.8
	Oldenzaal.	3.8	1.5	197.2	0.2
	Apeldoorn.	5.7	2.2	194.5	9.6
	De Bilt.	2.8	1.1	201.6	16.0
	Moyenne . . .			197.6	
Total de pages 116 et 117		422.9	105.3		677.8

$$b^2 = \frac{677.8}{51} - \frac{422.9 + 105.3}{57} = 4.0$$

$$b = 2.0$$

On trouve donc :

Pour les pendules de bronze $b = 1.1$.

Pour les pendules d'invar $b = 2.0$.

La première valeur est très incertaine, puisque le nombre d'observations est trop petit et que la valeur employée de m^2 est tellement inexacte. Il n'est donc pas étonnant que le résultat diffère de celui que nous avons trouvé auparavant.

La valeur de b pour les pendules d'invar est mieux fondée; aussi elle s'accorde assez bien avec les valeurs trouvées page 108.

Cependant ces dernières méritent plus de confiance, puisqu'elles sont indépendantes des irrégularités de la marche, et que la valeur nouvelle ne

l'est pas, parceque sa déduction dépend de la valeur très incertaine de c . Nous retiendrons donc pour tous les pendules les valeurs de b de page 108.

§ 7. Analyse des observations en 1919, 1920 et 1921.

Pendant les années précédentes nous n'avons fait que des observations pendant $3\frac{1}{2}$ heures le matin et le soir. Depuis 1919 nous faisons des observations ininterrompues en ajoutant au programme des années précédentes des observations de longue durée pendant la nuit et l'après-midi. Pour ces dernières années nous pouvons donc déterminer la différence entre la moyenne des observations de courte durée pendant la soirée et le matin et la moyenne de toutes les observations pendant les 24 heures qui est déterminée en donnant à chaque observation un poids proportionnel à la durée.

Il nous faut la valeur moyenne de cette différence pour pouvoir évaluer l'erreur résultant de cet écart dans les observations des premières années. Il va sans dire que la moyenne trouvée de cette manière a beaucoup plus de valeur que celle déterminée page 114, puisque maintenant la déduction n'a pas besoin d'hypothèses assez incertaines concernant la marche.

La marche ayant été beaucoup plus irrégulière en 1919 qu'en 1920 et 1921, nous déduisons la valeur moyenne séparément pour ces deux périodes.

1^e Période.

Année.	Date.	Station.	T' = moyenne des observations du matin et du soir.	T = moyenne de toutes les observations.	$T' - T$	$(T' - T)^2$
1919	5-6 Nov.	De Bilt.	0.5084641.3	4644.9	— 3.6	13.0
	6-7 „	„ „	0.5084607.8	4611.0	— 3.2	10.2
	12-13 „	Oud-Beijerland.	0.5084714.2	4711.8	+ 2.4	5.8
	15-16 „	Zierikzee.	0.5084729.5	4732.0	— 2.5	6.2
	23-24 „	Middelburg.	0.5084766.0	4757.7	+ 8.3	68.8
	25-26 „	Terneuzen.	0.5084790.2	4800.9	— 10.7	114.5
	8-9 Déc.	Bergen op Zoom.	0.5084725.1	4745.5	— 20.4	416.0
	10-11 „	Breda.	0.5084737.6	4738.8	— 1.2	1.4
	20-21 „	Ede.	0.5084658.7	4663.6	— 4.9	24.0
	27-28 „	De Bilt.	0.5084635.8	4642.5	— 6.7	44.8
	28-29 „	„ „	0.5084649.7	4653.0	— 3.3	10.9

$$\text{Carré moyenne de l'écart} = \frac{715.6}{11} = 65.0$$

2^e Période.

Année No. du voyage.	Date.	Station.	T' = moyenne des observations du matin et du soir.	T = moyenne de toutes les observations	$T' - T$	$(T' - T)^2$
1920 I	1 Juin.	De Bilt.	0.5084378.2	4378.0	+ 0.2	0.0
	2 "	" "	0.5084375.7	4376.5	- 0.8	0.6
	17 "	Sambeek.	0.5084524.3	4523.3	+ 1.0	1.0
	19 "	Ubagsberg.	0.5084811.9	4814.9	- 3.0	9.0
	29 "	"	0.5084814.2	4815.4	- 1.2	1.4
	30 "	"	0.5084817.6	4815.8	+ 1.8	3.2
	6 Juillet.	Maastricht.	0.5084704.7	4707.0	- 2.3	5.3
	8 "	Sittard.	0.5084694.6	4698.6	- 4.0	16.0
	18 "	Weert.	0.5084652.4	4653.6	- 1.2	1.4
	19 "	"	0.5084645.4	4648.2	- 2.8	7.8
	21 "	Oirschot.	0.5084573.0	4575.5	- 2.5	6.2
	28 "	Blerick.	0.5084555.0	4555.7	- 0.7	0.5
	30 "	Deurne.	0.5084553.9	4553.0	+ 0.9	0.8
	6 Août.	De Bilt.	0.5084364.4	4368.8	- 4.4	19.3
7 "	" "	0.5085354.6	4355.2	- 0.6	0.4	
1920 II	20 Oct.	" "	0.5084323.5	4321.6	+ 1.9	3.6
	21 "	" "	0.5084327.1	4330.5	- 3.4	11.6
	27 "	Winschoten.	0.5084159.8	4156.5	+ 3.3	10.9
	30 "	Hoogeveen.	0.5084208.5	4208.2	+ 0.3	0.1
	7 Nov.	Heerenveen.	0.5084123.3	4129.4	- 6.2	38.4
	9 "	Buitenpost.	0.5084089.6	4087.4	+ 2.2	4.8
	20 "	Workum.	0.5084098.6	4105.4	- 6.7	44.8
	23 "	Helder.	0.5084146.6	4146.2	+ 0.4	0.2
	24 "	"	0.5084148.0	4149.4	- 1.4	2.0
	1 Déc.	Hoorn.	0.5084213.3	4216.1	- 2.8	7.8
	3 "	Haarlem.	0.5084271.7	4276.8	- 5.1	26.0
	6 "	"	0.5084254.3	4255.5	- 1.2	1.4
	13 "	Amsterdam.	0.5084266.4	4266.2	+ 0.2	0.0
	14 "	"	0.5084267.0	4266.2	+ 0.8	0.6
	17 "	Gouda.	0.5084292.4	4296.4	- 4.0	16.0
	23 "	Oldenzaal.	0.5084247.6	4244.0	+ 3.6	13.0
	23-24 Déc.	"	0.5084253.2	4256.8	- 3.6	13.0
29 Déc.	Apeldoorn.	0.5084256.9	4262.0	- 5.1	26.0	
1921	12 Janv.	De Bilt.	0.5084325.4	4325.4	0.0	0.0
	13 "	" "	0.5084334.6	4330.4	+ 4.2	17.6
	23 Mars.	" "	0.5084317.2	4319.8	- 2.6	6.8
	24 "	" "	0.5084326.8	4328.0	- 1.2	1.4
	5 Avril.	" "	0.5084329.2	4332.2	- 3.0	9.0
	6 "	" "	0.5084332.9	4334.9	- 2.0	4.0
	7 "	" "	0.5084330.4	4332.1	- 1.7	2.9
	8 "	" "	0.5084333.9	4334.2	- 0.3	0.1

Année No. du voyage.	Date.	Station.	T' = moyenne des observations du matin et du soir.	T'' = moyenne de toutes les observations.	$T' - T''$	$(T' - T'')^2$
1921	31 Mai.	De Bilt.	0.5084349.0	4348.6	+ 0.4	0.2
	1 Juin.	„ „	0.5084348.0	4350.8	— 2.8	7.8
	2 „	„ „	0.5084338.5	4339.4	— 0.9	0.8
	3 „	„ „	0.5084359.7	4365.6	— 5.9	34.8
	4 „	„ „	0.5084362.2	4362.2	0.0	0.0
	5 „	„ „	0.5084362.2	4362.2	0.0	0.0
Total de pages 119 et 120 . .					— 62.2	378.5

$$\text{Carré moyen de l'écart} = \frac{378.5}{47} = 8.0$$

Pour trouver le carré de l'écart cherché, dont nous désignerons désormais la valeur moyenne par d , il faut encore diminuer les valeurs trouvées d'une petite quantité pour tenir compte des erreurs d'observation.

m étant l'erreur moyenne de l'observation d'un pendule pendant une heure, et les valeurs de l'écart étant déterminées en prenant la différence de la moyenne de deux pendules observés pendant 7 heures et pendant 24 heures il faut soustraire :

$$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{24} \right) \frac{m^2}{2} = 0.5.$$

On trouve donc :

$$\text{En 1919} \quad d^2 = 64.5 \quad d = 8.0.$$

$$\text{En 1920 et 1921} \quad d^2 = 7.5 \quad d = 2.7.$$

En examinant les tableaux ci-dessus, on remarque que l'écart n'a pas tout à fait un caractère accidentel; il a une tendance vers le signe négatif. La valeur moyenne ordinaire pendant 1920 et 1921 par exemple est

$$- \frac{62.2}{47} = - 1.3$$

avec une erreur moyenne de 0.4, c'est à dire que cette déviation de zéro a probablement une cause réelle. Il paraît donc que le chronomètre est sujet à une fluctuation journalière de la marche, d'une telle manière, qu'il y a une différence systématique entre la moyenne de la marche du matin et du soir et la moyenne de toute la journée. Cette différence étant probablement la même à toutes les stations, elle n'influence pas le résultat final des observations. L'erreur moyenne de ce résultat, occasionnée par l'écart de la marche, est donc plus petite que la valeur de d trouvée en haut, puisque celle-ci est calculée en considérant l'écart comme ayant entièrement un caractère accidentel.

Les valeurs trouvées de d sont sensiblement plus grandes que celles calculées page 114, ce qui n'est pas étonnant, parce que nous avons déduit celles-là des changements de marche pendant des heures consécutives, en faisant usage de l'hypothèse assez vague que ces changements sont accidentels et indépendants pour toutes les 24 heures. On reconnaît aisément que cette hypothèse diminue la valeur trouvée pour d .

Nous nous tiendrons donc à la valeur de d trouvée en haut et nous ne ferons usage des résultats de page 114 que pour remarquer qu'en 1914—1918 d est un peu plus grand qu'en 1920 et 1921. Nous en tiendrons compte en acceptant comme valeur de d en 1914—1918:

$$d^2 = 10 \quad d = 3,1.$$

Suivant la remarque faite en bas de la page précédente nous croyons que cette valeur est plutôt trop grande que trop petite.

Les résultats obtenus jusqu'ici ne nous permettent pas encore de déduire l'erreur moyenne totale du résultat final des observations à une station, puisqu'il nous manque encore l'erreur moyenne de la détermination de l'heure, qui est la plus importante de toutes.

C'est afin de pouvoir déduire directement cette erreur moyenne totale et en même temps celle de la détermination de l'heure, que nous avons fait partout où nous observions pendant plus d'une journée, des déterminations de l'heure entre ces différentes journées. ¹⁾ Nous ferons suivre ici la recherche correspondante:

§ 8. Recherche sur les erreurs moyennes par l'examen des résultats finaux pour la moyenne des durées d'oscillation des quatre pendules après l'application de toutes les corrections, y compris celle de la marche, pour les différentes journées à une même station.

La solution des équations suivant la méthode des moindres carrés est un peu compliquée. Pour ne pas encombrer ce chapitre, nous l'avons exécutée préalablement dans la § 14 du chap. I, de sorte que nous n'avons qu'à appliquer ici les formules déduites. Il y a cependant une difficulté puisque ces formules contiennent la quantité x c. à d. le rapport du carré de l'erreur moyenne m_i d'une détermination de l'heure, et du carré de l'erreur moyenne M de la détermination de la moyenne des durées d'oscillation pendant 24 heures après l'application de toutes les corrections sauf celle de la marche. L'erreur

¹⁾ Pour le résultat final des observations ces déterminations médianes n'ont aucune valeur: pour deux journées consécutives le résultat en est même entièrement indépendant; pour plus de deux journées il n'en dépend que si faiblement, et le poids du résultat n'est augmenté que de si peu, qu'on peut aussi bien s'en passer.

moyenne M est connue, ayant déterminé l'erreur moyenne m d'une détermination de la durée d'oscillation d'un pendule pendant une heure.

En supposant que nous avons observé les pendules deux à deux pendant 24 heures par jour, on a :

$$M^2 = \frac{m^2}{48}.$$

Supposant qu' on a observé les pendules deux à deux pendant r heures par jour, l'erreur moyenne de la moyenne de ces r heures a la valeur

$$\frac{m^2}{2r}.$$

Pour trouver dans ce cas l'erreur moyenne M de la moyenne des 24 heures, il faut y ajouter encore d^2 c.à.d. le carré de l'erreur moyenne par l'écart entre la marche pendant les r heures d'observation et la marche moyenne pendant les 24 heures; donc :

$$M^2 = \frac{m^2}{2r} + d^2.$$

L'erreur m_i n'est pas encore connue; nous voulons précisément la déduire.

Afin de pouvoir appliquer les formules, il nous faut donc commencer par accepter une valeur provisoire de α ; nous vérifierons après le calcul, si elle a été juste, ou s'il faut répéter la déduction avec une valeur plus précise de α .

On reconnaît d'ailleurs aisément qu'une erreur dans α et β n'a qu'un effet relativement restreint sur l'erreur moyenne totale du résultat final; l'influence principale est que l'erreur est distribuée autrement entre les deux parties composantes: l'erreur de la détermination de l'heure et l'erreur dans la durée d'oscillation corrigée.

La valeur de α n'ayant pas été la même pendant toutes les observations, puisque M et m_i ont changé, nous diviserons le calcul en différentes parties, pour chacune desquelles α est supposé constant.

A. Observations de 1919, 1920 et 1921.

Signaux horaires radiotélégraphiques de la Tour Eiffel.

Observations ininterrompues de la durée d'oscillation entre les déterminations de l'heure. Il n'y a donc pas d'erreur par un écart entre la marche moyenne pendant les observations et la marche moyenne pendant tout l'intervalle entre les déterminations de l'heure.

Nous trouvons

$$m^2 = 5.8$$

donc

$$M^2 = \frac{5.8}{48} = 0.12.$$

Nous posons

$$\alpha = 10^{12},$$

donc la quantité auxiliaire $\beta = \alpha c^2$, où c est la constante de la correction de la marche $= 58.8 \times 10^{-7}$, devient

$$\beta = 35.$$

Nous récapitulerons maintenant la solution de page 56 e.s. en introduisant dans les formules cette valeur de β . Nous avons donné aux déterminations de l'heure un poids $1/2$ donc aux déterminations de la moyenne des quatre durées d'oscillation pendant 24 heures, corrigée de tout sauf la marche, un poids $\frac{\alpha}{2}$. Si μ est l'erreur moyenne dans l'unité de poids on a donc :

$$m_i^2 = 2 \mu^2$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha} \mu^2 = 2 \mu^2 10^{-12}.$$

Nous avons désigné les moyennes des quatre durées d'oscillation, après l'application de toutes les corrections, pour les différentes journées d'observation, par

$$t_1 \ t_2 \ t_3 \ \text{etc.}$$

et nous avons introduit les quantités auxiliaires :

$$t_{12} = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad t_{13} = \frac{t_1 + t_3}{2} \quad \text{etc.}$$

$$\tau_{12} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \quad \tau_{13} = \frac{\tau_3 - \tau_1}{2} \quad \text{etc.}$$

Nous ferons suivre maintenant les formules (47) pour $[g x x]$ ¹⁾ dans les différents cas (dans plusieurs cas, il y a deux valeurs de $g x x$, marquées par ' et '' ; il faut les additionner pour obtenir $g x x$) et nous y joignons le nombre des observations superflues, par laquelle il faut diviser $[g x x]$ pour trouver μ^2 .

Pour $\beta = 35$:

Deux jours conséq. . .	1 obs. superflue	$10^{-10} [g x x] = 0.95 \tau_{12}^2$
Trois jours conséq. . .	1 " "	$10^{-10} [g x' x'] = 0.29 (t_{13} - t_2)^2$
	1 " "	$10^{-10} [g x'' x''] = 1.42 \tau_{13}^2$
Quatre jours conséq. . .	1 " "	$10^{-10} [g x' x'] = 0.57 (t_{14} - t_{23})^2$
	2 " "	$10^{-10} [g x'' x''] = 1.70 \tau_{14}^2 + 1.14 \tau_{23}^2 +$ $+ 1.12 \tau_{14} \tau_{23}$
Six jours conséq. . . .	2 " "	$10^{-10} [g x' x'] = 0.21 t_{16} - t_{25})^2 + 0.81$ $(t_{16} - t_{34})^2 + 0.41 (t_{25} - t_{34})^2$
	3 " "	$10^{-10} [g x'' x''] = 2.01 \tau_{16}^2 + 2.39 \tau_{25}^2 +$ $+ 1.21 \tau_{34}^2 + 2.36 \tau_{16} \tau_{25} +$ $+ 0.78 \tau_{16} \tau_{34} + 1.58 \tau_{25} \tau_{34}$
Deux jours non conséq.	1 " "	$10^{-10} [g x x] = 1.42 \tau_{12}^2$
Deux jours conséq. + un jour à part.	1 " "	$10^{-10} [g x' x'] = 0.57 (t_{12} - t_3)^2$
	1 " "	$10^{-10} [g x'' x''] = 0.95 \tau_{12}^2$
Quatre jours conséq. + deux jours conséq. . .	2 " "	$10^{-10} [g x' x'] = 0.01 (t_{14} - t_{23})^2 + 0.93$ $(t_{14} - t_{56})^2 + 1.39 (t_{23} - t_{56})^2$
	3 " "	$10^{-10} [g x'' x''] = 1.68 \tau_{14}^2 + 1.13 \tau_{23}^2 +$ $+ 1.11 \tau_{14} \tau_{23} + 0.95 \tau_{56}^2$

1) g = poids, x = erreur de l'observation.

En appliquant ces formules, nous obtenons le calcul suivant :

Année.	Date.	Station.	Formule.	$t_1 t_2$ etc.	t_{12} etc. τ_{12} etc.	Nombre d'obs. sup	rot [garr]		
1919	28 Déc.	De Bilt.	47 A	0.5084458.2	$\tau_{12} = - 4.2$	1	16.8		
	29 "			4449.7					
1920 I	1 Juin.	De Bilt.	47 A	0.5084453.4	$\tau_{12} = - 1.0$	1	1.0		
	2 "			4451.3					
	19 Juin.	Ubagsberg.	47 F	0.5084866.7	$t_{12} = 64.8$	1	2.1		
	29 "			4862.5	$t_3 = 66.7$	1	4.6		
	30 "			4867.0	$\tau_{12} = 2.2$				
	18 Juillet.	Weert.	47 A	0.5084732.0	$\tau_{12} = - 3.3$	1	10.4		
	19 "			4725.4					
	6 Août.	De Bilt.	47 A	0.5084454.8	$\tau_{12} = + 0.3$	1	0.1		
	7 "			4455.4					
1920 II	23 Nov.	Helder.	47 A	0.5084272.8	$\tau_{12} = + 1.6$	1	2.4		
	24 "			4276.0					
	3 Déc.	Haarlem.	47 E	0.5084396.9	$\tau_{12} = + 0.8$	1	0.9		
	6 "			4398.5					
	13 Déc.	Amsterdam.	47 A	0.5084395.1	$\tau_{12} = + 4.8$	1	21.9		
	14 "			4404.6					
1921	12 Janv.	De Bilt.	47 A	0.5084452.6	$\tau_{12} = + 1.4$	1	1.9		
	13 "			4455.4					
1921	23 Mars.	De Bilt.	47 G	0.5084455.8	$t_{14} = 57.4$	2	15.6		
	24 "			4452.2	$t_{23} = 52.2$	3	19.0		
	5 Avril.			4454.1	$t_{56} = 54.0$				
	6 "			4453.9	$\tau_{14} = + 3.4$				
	7 "			4450.5	$\tau_{23} = - 1.7$				
	8 "			4460.8	$\tau_{56} = - 1.8$				
	31 Mai.			De Bilt.	47 D	0.5084457.5	$t_{16} = 55.8$	2	25.4
	1 Juin.					4454.4	$t_{25} = 54.2$	3	8.2
	2 "					4448.9	$t_{34} = 50.8$		
	3 "					4452.8	$\tau_{16} = - 1.7$		
4 "	4454.1	$\tau_{25} = - 0.2$							
5 "	4454.1	$\tau_{34} = + 2.0$							
Total . . .						20	130.3		

$$\mu^2 = \frac{0.01303}{20} = 0.00065$$

donc $m_t^2 = 0.00130 \text{ sec}^2$ $m_t = 0.036 \text{ sec.}$

et $\alpha = \frac{m_t^2}{M^2} = \frac{0.00130}{0.12 \times 10^{-11}} = 1.08 \times 10^{12}$

La valeur trouvée pour α ne diffère que très peu de la valeur provisoirement acceptée, nous ne répéterons donc pas le calcul. On reconnaît d'ailleurs aisément, que pour les grandes valeurs de α et β , les formules pour $[g_{xx}]$ ne changent presque pas quand α varie un peu.

On peut remarquer que la valeur de μ^2 qui s'ensuit des observations aux stations Helder, Haarlem et Amsterdam où il y avait des mouvements considérables du sol n'est pas sensiblement plus grande que la valeur trouvée :

$$\mu^2 = \frac{25.2}{3 \times 10^4} = 0.00084$$

On en peut tirer une affirmation de la conclusion, que la méthode de l'élimination de ces perturbations donne de bons résultats.

m_t est l'erreur moyenne totale des déterminations de l'heure. Elle contient donc aussi bien l'erreur de nos observations, que l'erreur dans les données fournies par le Bureau International de l'Heure (corrections semi-définitives publiées en Avril 1922). Il nous faut remarquer d'ailleurs, que l'erreur moyenne déduite en appliquant les données provisoires, télégraphiées immédiatement après les signaux était un peu plus petite (0.029 sec.)

Il va sans dire qu'en général des erreurs dans les données, variant systématiquement et lentement avec le temps, ne se trahiront pas dans les résultats des observations, puisque les différentes journées d'observation à une même station (dont m_t est déduite) étaient consécutives ou bien se suivaient après un intervalle court. Il est donc impossible de décider, si les données y étaient sujettes. Il faut se rendre compte, que peut être l'erreur totale des observations de pendule devrait être augmentée correspondamment.

Nous voulons mentionner encore que pendant toutes les observations de 1920 et des premiers mois de 1921 (janv.—avril) nous avons observé deux signaux horaires donnés avec un intervalle d'une demie-heure (à 11.^h0 et à 11.^h30 Greenwich). L'intervalle étant trop court, pour que les fluctuations de la marche du chronomètre pussent avoir d'influence, la comparaison des résultats nous fournit un moyen de déterminer l'erreur moyenne m_0 de l'observation des signaux ou plutôt la combinaison de cette erreur avec l'erreur de la comparaison à Paris des signaux avec les pendules astronomiques. Nous faisons suivre ici le résultat du calcul :

$$m_0^2 = 0.00040 \text{ sec}^2 \qquad m_0 = 0.02 \text{ sec.}$$

Le carré de l'erreur moyenne de la moyenne des deux signaux est donc 0.00020 sec². Il en reste donc pour le carré de l'erreur moyenne dans les données fournies par le B. I. II.

$$m_d^2 = 0.00128 - 0.00020 = 0.00108$$

$$m_d = 0.033.$$

Nous ne donnons ce chiffre naturellement que sous la plus grande réserve, puisqu'il y a tant d'influences différentes et incertaines qui entrent dans la déduction.

Déduction de l'erreur moyenne totale du résultat final T pour une station.

Pour une journée d'observation on a :

$$m_1^2 = M^2 + 2 c^2 m^2 = 9,0 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$$

Pour plusieurs journées d'observations nous employons les formules pour les poids de T déduites page 56 c.s. en y substituant $\alpha = 10^{12}$ et $\beta = 35$:

$$\begin{array}{ll} Q_T = 3600 \cdot 10^{-14} & m_2^2 = Q_T \mu^2 = 2,3 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^2 \\ Q_T = 1470 \cdot 10^{-14} & m_3^2 = Q_T \mu^2 = 0,9 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \\ Q_T = 752 \cdot 10^{-14} & m_4^2 = Q_T \mu^2 = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \\ Q_T = 286 \cdot 10^{-14} & m_6^2 = Q_T \mu^2 = 0,2 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \\ Q_T = 7100 \cdot 10^{-14} & m_{1,1}^2 = Q_T \mu^2 = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \\ Q_T = 2870 \cdot 10^{-14} & m_{2,1}^2 = Q_T \mu^2 = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \\ Q_T = 622 \cdot 10^{-14} & m_{4,2}^2 = Q_T \mu^2 = 0,4 \cdot 10^{-14} \text{ ,,} \end{array}$$

Réunissant ces résultats dans un tableau :

Un jour d'observation	$m_1^2 = 9,0 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^2$
Deux jours consécutifs d'observation	$m_2^2 = 2,3 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Trois jours consécutifs d'observation	$m_3^2 = 0,9 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Quatre jours consécutifs d'observation	$m_4^2 = 0,5 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Six jours consécutifs d'observation	$m_6^2 = 0,2 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Deux jours d'observation non consécutifs	$m_{1,1}^2 = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Deux jours consécutifs et un jour à part	$m_{2,1}^2 = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$
Quatre jours consécutifs et deux jours consécutifs	$m_{4,2}^2 = 0,4 \cdot 10^{-14} \text{ ,,}$

Il nous manque encore l'erreur moyenne du résultat des observations à Potsdam en 1921.

Nous observions là pendant douze heures par jour, en maintenant le même programme des observations qu'ailleurs, avec la seule différence que nous le divisions en deux en exécutant chaque jour la moitié. La marche de la pendule activant l'appareil des coïncidences nous fut communiquée par M. le prof. B. WANACH de l'Institut géodésique.

Nous croyons qu'il est permis de supposer que les résultats finaux des différentes journées sont indépendants, de sorte qu'on peut en déduire l'erreur moyenne de la manière ordinaire :

1 ^e Paire de Pendules. 12—1.			2 ^e Paire de Pendules 11—9		
Date 1921	Moyenne des deux durées d'oscillation.	xx	Date 1921	Moyenne des deux durées d'oscillation.	xx
23 Avril	0.5084335.8	2.9	22 Avril	0.5084530.7	0.0
26 „	0.5084331.6	6.2	25 „	0.5084529.5	1.4
28 „	0.5084333.9	0.0	27 „	0.5084531.5	0.6
29 „	0.5084333.1	1.0	30 „	0.5084530.3	0.2
1 Mai	0.5084334.4	0.1	3 Mai	0.5084530.0	0.5
4 „	0.5084335.9	3.2	5 „	0.5084532.0	1.7
	0.5084334.1	13.4		0.5084530.7	4.4

Le carré de l'erreur moyenne du résultat des observations de chaque jour est donc :

$$\frac{13.4 + 4.4}{2} \times \frac{1}{5} = 1.8 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$$

et on trouve pour le carré de l'erreur moyenne du résultat final pour Potsdam la valeur :

$$m_p^2 = \frac{1.8}{12} = 0.15 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2.$$

B. Observations de 1915 et 1918.

Signaux téléphoniques de l'Observatoire de Leiden. Observations pendant 3 $\frac{1}{2}$ heures le matin et le soir.

On a donc :

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{m^2}{14} + d^2 \\ &= \frac{5.8}{14} + 10 = 10.41 \text{ en 1918} \\ &= \frac{15.9}{14} + 10 = 11.14 \text{ en 1915.} \end{aligned}$$

Les valeurs de M^2 pour les deux périodes ne différant que relativement peu, nous acceptons une même valeur provisoire de α et β :

Mettant

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.95 \times 10^{10} \\ \beta &= \alpha c^2 = 0.33 \end{aligned}$$

nous trouvons en introduisant ces valeurs dans les formules pour $[gxx]$ de page 56 e. s.

- I. Deux jours consécutifs. (1 obs. superflue) $10^{-10} [gxx] = 0.48 \tau_{12}^2$.
- II. Trois „ „ „ $\left\{ \begin{array}{l} (1 \text{ „ „ }) 10^{-10} [gx'x'] = 0.15 (t_{13} - t_2)^2, \\ (1 \text{ „ „ }) 10^{-10} [gx''x''] = 0.57 \tau_{13}^2 \end{array} \right.$

Les autres cas ne s'étant pas produits, nous passons sous silence les formules correspondantes.

En appliquant les formules, nous trouvons:

Année.	Date.	Station.	Formule.	$t_1 t_2$ etc.	t_{12} etc. τ_{12} etc.	Nombre d'obs. sup.	$\log [s_{1,2}]$
1915 I	13-14 Juillet.	De Bilt.	47 B	0.5084429.3	$t_{13} = 30.6$	1	21.6
	14-15 „			4442.6	$t_2 = 42.6$	1	1.1
	15-16 „			4432.0	$\tau_{13} = 1.4$		
	27-28 Juillet.	Schoorl.	47 A	0.5084322.0	$\tau_{12} = 2.0$	1	1.9
	28-29 „			4318.0			
	3-4 Août.	Urk.	47 A	0.5084318.8	$\tau_{12} = 3.6$	1	6.2
	4-5 „			4325.9			
	11-12 Août.	Terschelling.	47 A	0.5084156.6	$\tau_{12} = 1.4$	1	0.9
	12-13 „			4159.3			
	16-17 Août.	Ameland.	47 B	0.5084175.4	$t_{13} = 78.0$	1	42.3
	17-18 „			4161.2	$t_2 = 61.2$	1	3.9
	18-19 „			4180.6	$\tau_{13} = 2.6$		
	24 Août.	De Bilt.	47 B	0.5084441.3	$t_{13} = 45.0$	1	4.9
	25 „			4439.3	$t_2 = 39.3$	1	7.8
26 „			4448.7	$\tau_{13} = 3.7$			
1915 II	29-30 Sept.	De Bilt.	47 B	0.5084431.2	$t_{13} = 31.2$	1	1.3
	30 S.-1 Oct.			4428.3	$t_2 = 28.3$	1	0.0
	1-2 Oct.			4431.3	$\tau_{13} = 0.0$		
	6-7 Oct.	Cocksdoorp.	47 A	0.5084207.1	$\tau_{12} = 1.4$	1	0.9
	7-8 „			4204.3			
	12-13 Oct.	Enkhuizen.	47 A	0.5084317.1	$\tau_{12} = 1.9$	1	1.7
	13-14 „			4320.9			
	19-20 Oct.	Harlingen.	47 B	0.5084228.3	$t_{13} = 28.0$	1	8.0
	20-21 „			4235.3	$t_2 = 35.3$	1	0.1
21-22 „			4227.7	$\tau_{13} = 0.3$			

Année.	Date.	Station	Formule.	t_1 t_2 etc.	t_{12} etc. τ_{12} etc.	Nombre d'obs. sup.	$10^4[\delta x x']$
1915 II	27-28 Oct.	Leeuwarden.	47 B	0.5084221.3	$t_{13} = 23.3$	1	6.9
	28-29 „			4230.1	$t_2 = 30.1$	1	2.3
	29-30 „			4225.3	$\tau_{13} = 2.0$		
	2-3 Nov.	Amersfoort.	47 A	0.5084427.3	$\tau_{12} = 1.2$	1	0.7
	3-4 „			4429.6			
	9-10 Nov.	De Bilt.	47 B	0.5084446.0	$t_{13} = 42.0$	1	2.8
	10-11 „			4437.7	$t_2 = 37.7$	1	9.1
11-12 „	4438.0			$\tau_{13} = 4.0$			
1918	21-22 Sept.	De Steeg.	47 B	0.5084490.7	$t_{13} = 88.6$	1	6.2
	22-23 „			4495.0	$t_2 = 95.0$	1	2.5
	23-24 „			4486.5	$\tau_{13} = 2.1$		
	16-17 Oct.	Oss.	47 A	0.5084549.3	$\tau_{12} = 0.6$	1	0.2
	17-18 „			4548.0			
	28-29 Oct.	Gorinchem.	47 A	0.5084521.1	$\tau_{12} = 1.4$	1	0.9
	29-30 „			4523.8			
	11-12 Nov.	De Bilt.	47 B	0.5084558.8	$t_{13} = 57.0$	1	0.0
	12-13 „			4557.4	$t_2 = 57.4$	1	1.9
13-14 „	4555.2			$\tau_{13} = 1.8$			
Total des pages 128 en 129 . . .						26	136.1

$$\mu^2 = \frac{0.0136}{26} = 0.00052$$

donc $m_i^2 = 0.00104 \text{ sec.}^2$ $m_i = 0.032 \text{ sec.}$

et $\alpha = \frac{m_i^2}{M^2} = \frac{0.00104}{10.78 \times 10^{-14}} = 0.96 \times 10^{10}$

La valeur trouvée pour α s'accorde avec la valeur provisoire; nous ne répéterons donc pas la déduction.

La valeur de μ^2 s'ensuivant des observations aux stations Schoorl, Terschelling, Ameland, Cocksdorp, Enkhuizen et Harlingen, où les mouvements du sol étaient considérables, se calcule à

$$\frac{59.7}{8 \times 10^4} = 0.0075$$

Quoique cette valeur est un peu plus grande, que celle trouvée plus haut, ce qui est attribuable aux observations à Ameland, la différence ne nous paraît pas assez grande pour justifier de donner un poids différent à ces stations.

m_t est de nouveau l'erreur totale des déterminations de l'heure. Elle se compose donc d'une part de l'erreur de nos observations des signaux téléphoniques, et d'autre part des erreurs dans les données fournies par l'Observatoire de Leiden. N'ayant pas de moyen de déterminer à part une de ces deux erreurs, comme nous le pouvions faire ci-dessus pour les observations des signaux horaires radiotélégraphiques, il est impossible de séparer ces deux genres d'erreurs sans faire des hypothèses.

En supposant que l'erreur de l'observation des signaux téléphoniques de Leiden est égale à celle de l'observation des signaux horaires du Tour Eiffel, on obtiendrait pour le carré de l'erreur moyenne des données fournies par l'Observatoire de Leiden :

$$m_t^2 = 0.00104 - 0.00040 = 0.00064 \text{ sec.}^2$$

$$m_t = 0.025 \text{ sec.}$$

Il va sans dire que ce résultat est encore plus vague que celle trouvée pour les données du Bureau International de l'Heure.

En substituant $\alpha = 0.95 \cdot 10^{10}$ et $\beta = 0.33$ dans les formules pour Q_T de page 56, on trouve :

$$47 A. \quad Q_T = 14000 \cdot 10^{-14},$$

$$47 B. \quad Q_T = 8500 \cdot 10^{-14}.$$

L'erreur moyenne du résultat final T pour une station se calcule donc à :

Un jour d'observations :	$m_1^2 = M^2 + 2c^2 m_t^2 = 17.0 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$
Deux jours d'observations :	$m_2^2 = 7.3 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$
Trois jours d'observations :	$m_3^2 = 4.4 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$

Il nous reste encore à déterminer l'erreur moyenne du résultat des observations à l'observatoire de Leiden, où nous obtenions la marche du chronomètre en la comparant directement au moyen d'un chronographe avec les pendules astronomiques de l'observatoire.

Nous faisons les observations de pendules réparties assez régulièrement sur toute la journée. Après l'application de toutes les corrections, nous trouvons les résultats suivants pour la moyenne des quatre pendules, observées toujours deux à deux pendant \pm une heure. En acceptant qu'on peut les considérer comme entièrement indépendantes, nous en déduisons l'erreur moyenne du résultat final de la manière ordinaire :

Date.	Moyenne de la durée d'oscillation des 4 pend.	$x x$
20 Juillet.	0.5084427.7	50.4
21 „	0.5084422.4	3.2
21 „	0.5084420.3	0.1
21 „	0.5084423.9	10.9
22 „	0.5084413.0	57.7
22 „	0.5084422.5	3.6
23 „	0.5084424.0	11.6
23 „	0.5084418.0	6.8
23 „	0.5084424.1	12.2
23 „	0.5084419.8	0.6
24 „	0.5084417.8	7.8
24 „	0.5084417.9	7.3
24 „	0.5084414.9	32.5
25 „	0.5084422.0	2.0
	0.5084420.6	206.7

L'erreur moyenne du résultat se calcule donc à :

$$m_L^2 = \frac{206.7}{13 \times 14} = 1.1 \times 10^{-11} \text{ sec}^2$$

$$m_L = 1.0 \times 10^{-7} \text{ sec.}$$

C. *Observations de 1913 et 1914.*

Signaux téléphoniques de l'Observatoire de Leiden. La moitié des observations a été faite avec deux pendules ensemble (deux heures le matin et le soir) et l'autre moitié avec les pendules à part (trois heures le matin et le soir). En 1913 les observations étaient réparties un peu plus irrégulièrement par la journée à cause des observations avec l'appareil DEFFORGES, qui furent faites en même temps mais la durée totale par jour a été environ la même.

Nous avons donc

$$M^2 = \frac{m^2}{7} + d^2$$

$$= \frac{60.7}{7} + 15 = 23.7 \times 10^{-11} \text{ sec.}$$

Nous avons mis la valeur de d^2 à 15 au lieu de 10, puisque la durée des observations par jour a été moindre qu'en 1915 et 1918. Cette supposition est assez vague; d'ailleurs aussi la première partie de M^2 est très incertaine, puisque la valeur de m^2 est tellement peu sûre.

En acceptant maintenant pour le calcul de la valeur provisoire de α et β , la valeur de m_L^2 trouvée ci-dessus, on a

$$\alpha = \frac{m_L^2}{M^2} = \frac{0.00090}{23.7 \times 10^{-11}} = 0.38 \times 10^{10}$$

$$\beta = \alpha c^2 = 0.13$$

et en substituant ces valeurs dans les formules 47A :

Deux jours consécutifs. (1 observation superflue) $10^{-10} [gxx] = 0.27 \tau_{12}^2$.

Les autres cas ne se sont pas produits.

En appliquant cette formule nous trouvons :

Année.	Date.	Station.	$t_1 t_2$	τ_{12}	Nombre d'obs. sup.	$10^4 [gxx]$
1913	23 Juillet.	De Bilt.	0.5012726.2	+ 6.2	1	10.4
	24-25 Juillet.		2738.6			
	31 J.-1 Août.	Wolberg.	0.5012705.4	- 5.9	1	9.4
	2 Août.		2693.6			
7 Août.	Harikerberg.	0.5012714.1	- 3.6	1	3.5	
8-9 Août.		2706.9				
	14 Août.	De Bilt.	0.5012729.6	+ 2.2	1	1.3
	15-16 Août.		2734.0			
1914	15-16 Juillet.	De Bilt.	0.5012717.5	- 3.8	1	3.9
	16-17 „		2710.0			
	17-18 Sept.	De Bilt.	0.5012744.3	- 4.0	1	4.3
	18-19 „		2736.4			
	1-2 Oct.	Sleen.	0.5012595.4	+ 6.9	1	12.8
	2-3 „		2609.2			
	8-9 Oct.	Groningen.	0.5012517.2	+ 0.8	1	0.2
	9-10 Oct.		2518.9			
	14-15 Oct.	Leeuwarden.	0.5012509.6	0.0	1	0.0
15-16 „	2509.6					
21-22 Oct.	Utrecht.	0.5012722.4	+ 4.7	1	6.0	
22-23 „		2731.8				
4-5 Nov.	De Bilt.	0.5012708.1	+ 3.4	1	3.1	
5-6 „		2715.0				
				Total . . .	11	54.9

$$M^2 = \frac{0.00549}{11} = 0.00050$$

donc

$$m_t^2 = 0.00100 \text{ sec.}^2 \quad m_t = 0.032 \text{ sec.}$$

La valeur trouvée pour m_t s'accorde donc très bien avec la valeur trouvée plus haut pour les années 1915—1918.

L'erreur moyenne du résultat final T pour une station se trouve en introduisant $\alpha = 0.38 \cdot 10^{10}$ et $\beta = 0.13$ dans la formule 47 A pour Q_T :

$$Q_T = 29700 \cdot 10^{-14}$$

donc pour deux jours d'observation :

$$m_2^2 = 14.8 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}^2$$

A Delft nous avons observé pendant quatre journées consécutives en recevant des signaux horaires téléphoniques de Leiden au commencement et à la fin. L'erreur moyenne du résultat là se calcule donc à

$$m_D^2 = \frac{M^2}{4} + \frac{c^2 m_i^2}{8} = 6.3 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}$$

§ 9. Comparaison des différentes valeurs du résultat final T
à De Bilt, afin de contrôler la variabilité des pendules.

En supposant qu'il n'y a pas de variabilité systématique, on peut déterminer la déviation moyenne m_r de T à laquelle il faut s'attendre, cette déviation se composant d'une part des erreurs d'observation etc., dont nous avons déduit ci-dessus la valeur moyenne pour les différents nombres de journées d'observation, et d'autre part d'une partie causée par la variabilité accidentelle, dont nous avons déduit la valeur moyenne b_T page 108. On peut donc calculer m_r et on peut voir si les déviations constatées x s'accordent avec cette valeur.

I. Pendules d'invar.

Année et No. de la tournée.	Commencement ou fin de la tournée.	Résultat final T'	x	b_T^2	Nombre de jours d'obs. n	m_n^2	$m_r = \sqrt{b_T^2 + m_n^2}$
1915 I	Commencement.	0.5084435.1	- 2.0	2.0	3	4.4	2.5
	Fin.	4442.9	+ 5.8	2.0	3	4.4	2.5
1915 II	Commencement.	0.5084430.1	- 7.0	2.0	3	4.4	2.5
	Fin.	4440.4	+ 3.3	2.0	3	4.4	2.5
	Moyenne 1915	0.5084437.1					
1918	Commencement.	0.5084455.0	+ 1.2	2.0	3	4.4	2.5
	Fin.	4457.1	+ 3.3	2.0	3	4.4	2.5
1919	Commencement.	0.5084446.6	- 7.2	2.0	2	2.3	2.1
	Fin.	4454.0	+ 0.2	2.0	2	2.3	2.1
1920 I	Commencement.	0.5084452.4	- 1.4	2.0	2	2.3	2.1
	Fin.	4455.1	+ 1.3	2.0	2	2.3	2.1
1920 II	Commencement.	0.5084455.8	+ 2.0	2.0	2	2.3	2.1
	Fin.	4454.0	+ 0.2	2.0	2	2.3	2.1
1921	Commencement.	0.5084454.6	+ 0.8	2.0	4 et 2	0.4	1.5
	Fin.	4453.1	- 0.7	2.0	6	0.2	1.5
	Moyenne 1918/21	0.5084453.8					

En examinant les valeurs de T on remarque que T a changé sensiblement entre les années 1915 et 1918, ce qui s'explique peut-être par le fait qu'en 1915 les pendules étaient tout neufs et qu'ils ont subi des changements moléculaires pendant les premières années, quoique ces changements ne se sont pas encore produit pendant les deux tournées en 1915.

Pendant les tournées des dernières années (1918—1921) les déviations de T étaient petites et n'excédaient pas la valeur moyenne calculée m_c . Nous pouvons donc maintenir pour ces années-là la valeur déjà trouvée b_T de la variabilité moyenne de T .

Pendant les voyages de 1915 le changement de T a été un peu plus grande que la valeur moyenne m_c ; en outre il s'est effectué deux fois dans le même sens: une augmentation pendant la tournée et une diminution pendant les intervalles de repos. Dans les dernières années, 1918—1921 on peut encore remarquer une même tendance, quoique beaucoup plus petite et plus vague. Nous ne pouvons décider si c'est un effet du hasard ou bien un fait réel.

Les changements excèdent de si peu la valeur moyenne calculée m_c , qu'il ne nous paraît pas nécessaire d'augmenter la valeur b_T de la variabilité des pendules, d'autant moins, que, si vraiment une partie de ces changements a été causée par une variation systématique et régulière pendant le voyage, cette partie n'occasionne pas d'erreur dans le résultat g , (voir page 140) et que c'est seulement pour la déduction de l'erreur moyenne de ce résultat que nous aurons besoin de b_T .

Pendules de bronze.

Année	Commencement ou fin de la tournée.	Resultat final T	x	b_T^2	Nombre de jours d'obs.	m^2	$m_c =$ $\sqrt{m^2 + b_T^2}$
1913	Commencement	0.5012734.5	+ 4.9	10.5	2	14.8	5.0
	Fin	2731.8	+ 2.2	10.5	2	14.8	5.0
1914	Commencement	0.5012740.4	+10.8	10.5	2	14.8	5.0
	Fin	2711.6	-18.0	10.5	2	14.8	5.0
	Moyenne	0.5012729.6					

Les variations de T ont été assez grandes, surtout en 1914. Aussi nous avons répété plus tard les observations à une des stations de la tournée de 1914 afin d'en pouvoir déduire la valeur de T pour de Bilt au milieu de cette tournée. Nous obtenions

$$T = 0.5012718.8$$

En examinant les valeurs des différences des quatre durées d'oscillation (page 93) on peut conclure que ces changements ne sont pas attribuables à des variations d'un ou de deux pendules, mais qu'ils ont changé tous d'une manière parfaitement irrégulière. Comme nous l'avons déjà remarqué page 103 il nous est impossible de décider si ces changements sont réels, ou s'ils prennent leur origine dans une distribution irrégulière de la température dans l'appareil, par laquelle les déterminations de la température des pendules par l'observation du thermomètre deviendraient erronées.

Les données ne sont pas assez nombreuses pour obtenir une détermination un peu plus satisfaisante de b_T que celle de page 108. Nous avons donc maintenu la valeur 3,2, quoiqu'elle est très incertaine.

§ 10. Détermination de l'erreur moyenne des résultats finaux pour les différences dg entre la pesanteur à de Bilt et aux différentes stations.

Cette erreur se compose de trois parties:

1^o. L'erreur occasionnée par l'erreur du résultat T à de Bilt qui est la moyenne du résultat des observations au commencement et de celles à la fin de chaque tournée, et du résultat T à la station considérée.

2^o. L'erreur occasionnée par la variation des pendules pendant le voyage.

3^o. L'erreur occasionnée par l'erreur dans les constantes de la température et de la densité de l'air. Ces erreurs n'ont en général qu'une influence insensible sur les différences des durées observées à une même station, puisque la température et la densité de l'air ne varient que très peu pendant les quelques jours d'observation. 1) Il va sans dire que pour les observations à différentes stations ces différences peuvent atteindre des valeurs plus considérables.

La troisième partie de l'erreur est très petite par comparaison aux deux autres:

L'erreur moyenne de la moyenne des quatre constantes de la température est (voir page 74)

$$0,025 \quad 10^{-7} \text{ sec.}$$

1) Pour les observations à petite pression il y a eu aussi des changements de la pression pendant les observations à une même station. Aussi on aurait dû en tenir compte en déduisant les erreurs moyennes par la comparaison de ces observations, ce qui donnerait une diminution de ces autres erreurs trouvées. Nous l'avons négligé, puisque l'effet est insignifiant auprès des autres erreurs.

Pour une différence des températures de 10 degrés (un écart plus grand ne s'est jamais produit), l'erreur moyenne dans les différences des T n'atteint donc que la valeur :

$$0.25 \quad 10^{-7} \text{ sec.}$$

donc le carré est :

$$0.06 \quad 10^{-14} \text{ sec.}$$

elle est donc tout à fait négligeable auprès des autres parties de l'erreur moyenne.

L'erreur moyenne occasionnée par l'erreur moyenne des constantes de la densité de l'air a été déterminée dans le troisième chapitre. Nous trouvons là que l'erreur moyenne maximale de la différence des T à deux stations est $0.14 \cdot 10^{-7}$ sec. pour les observations à pression atmosphérique et $0.27 \cdot 10^{-7}$ sec. pour les observations à faible pression; le carré de ces erreurs est donc également négligeable auprès des autres parties de l'erreur moyenne.

Pour les pendules de bronze on obtient le même résultat.

Nous ne retenons donc que les deux premières parties de l'erreur moyenne.

Nous déduirons d'abord l'erreur moyenne m_{Δ} de la différence des T à de Bilt et à la station, et ensuite en multipliant cette erreur par 0.3914 l'erreur moyenne M_B des différences de g .

Si nous avons observé à de Bilt au commencement de la tournée pendant α journées, à la fin pendant β journées et à la station pendant γ journées, la première partie de m_{Δ}^2 a la valeur

$$\frac{1}{4} (m_{\alpha}^2 + m_{\beta}^2) + m_{\gamma}^2$$

La seconde partie, causée par la variabilité des pendules est

$$1 \frac{1}{2} b_T^2.$$

Donc

$$m_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} (m_{\alpha}^2 + m_{\beta}^2) + m_{\gamma}^2 + 1 \frac{1}{2} b_T^2$$

et

$$M_B = 0.3914 m_{\Delta}.$$

Nous faisons suivre ici le calcul de m_{Δ} et M_B pour toutes les stations en employant les valeurs de m_{α} et de b_T déduites dans les paragraphes précédentes.

Année No. de la tournée.	Station.	α, β, γ	m_{α}^2	m_{β}^2	m_{γ}^2	$\frac{1}{4}(m_{\alpha}^2 + m_{\beta}^2) + m_{\gamma}^2$	$\frac{1}{2}b_1^2$	m_{Δ}^2	m_{Δ} 10 ⁻⁷ sec.	M_{β} 10 ⁻³ cm. sec. ⁻²
1921	Potsdam.	2/4, 6, --	0.4	0.2	0.15	0.3	1.5	1.8	1.3	0.5
1915 I	Ameland.	3, 3, 3	4.4	4.4	4.4	6.6	3.0	9.6	3.1	1.2
1915 II	Terschelling.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1915 II	Cocksdorp.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1915 II	Harlingen.	3, 3, 3	4.4	4.4	4.4	6.6	3.0	9.6	3.1	1.2
1915 II	Leeuwarden.	3, 3, 3	4.4	4.4	4.4	6.6	3.0	9.6	3.1	1.2
1920 II	Buitenpost.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1914	Groningen.	2, 2, 2	14.8	14.8	14.8	22.2	15.8	38.0	6.2	2.4
1920 II	Winschoten.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1918	Assen.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1914	Sleen.	2, 2, 2	14.8	14.8	14.8	22.2	15.8	38.0	6.2	2.4
1920 II	Hoogeveen.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1918	Steenwijk.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1920 II	Ileerenveen.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 II	Workum.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 II	Helder.	2, 2, 2	2.3	2.3	2.3	3.5	3.0	6.5	2.5	1.0
1915 I	Schoorl.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1920 II	Hoorn.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1915 II	Enkhuizen.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1915 I	Urk.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1913	Wolberg.	2, 2, 2	14.8	14.8	14.8	22.2	15.8	38.0	6.2	2.4
1918	Hollander.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1920 II	Oldenzaal.	2, 2, 1/1	2.3	2.3	4.5	5.7	3.0	8.7	2.9	1.1
1913	Harikerberg.	2, 2, 2	14.8	14.8	14.8	22.2	15.8	38.0	6.2	2.4
1918	Winterswijk.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1920 II	Apeldoorn.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1918	De Steeg.	3, 3, 3	4.4	4.4	7.3	6.6	3.0	9.6	3.1	1.2
1919	Ede.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1915 II	Amersfoort.	3, 3, 2/3	4.4	4.4	4.4/7.3	5.1	3.0	8.1	2.8	1.1
1914	Utrecht.	2, 2, 2	14.8	14.8	14.8	22.2	15.8	38.0	6.2	2.4
1920 II	Amsterdam.	2, 2, 2	2.3	2.3	2.3	3.5	3.0	6.5	2.5	1.0
1920 II	Haarlem.	2, 2, 1/1	2.3	2.3	4.5	5.7	3.0	8.7	2.9	1.1
1920 II	Gouda.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1915 I	Leiden.	3, 3, --	4.4	4.4	1.0	3.2	3.0	6.2	2.5	1.0
1914	Delft.	2, 2, --	14.8	14.8	6.3	13.7	15.8	29.5	5.4	2.1
1919	Oud-Beijerland	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1918	Gorinchem.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1919	Zierikzee.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1919	Middelburg.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1919	Ter Neuzen.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1919	Bergen op Zoom	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1919	Breda.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Oirschot.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1918 I	Oss.	3, 3, 2	4.4	4.4	7.3	9.5	3.0	12.5	3.5	1.4
1920 I	Sambeek.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Deurne.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Blerick.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Weert.	2, 2, 2	2.3	2.3	2.3	3.5	3.0	6.5	2.5	1.0
1920 I	Sittard.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Maastricht.	2, 2, 1	2.3	2.3	9.0	10.2	3.0	13.2	3.6	1.4
1920 I	Ubagsberg.	2, 2, 1/2	2.3	2.3	1.8	3.0	3.0	6.0	2.4	1.0

Pour le voyage à Potsdam nous avons cru pouvoir mettre la valeur de $1\frac{1}{2} b_T^2$ à 1,5 au lieu de 3, puisque nous avons pris des soins spéciaux pour éviter toute perturbation pendant les transports, et que les différences des quatre durées d'oscillation ne démontrent que de très petites variations, de sorte qu'on aurait trouvé en les prenant pour base de la déduction $1\frac{1}{2} b_T = 0,9$, c'est à dire une valeur encore plus petite.

Quant aux valeurs trouvées pour M_B il faut encore une fois remarquer, que celles de 1913 et 1914 sont très incertaines, tandis que celles des années 1919, 1920 et 1921 méritent le plus de confiance.

§ 11. Détermination de l'erreur moyenne totale de g aux différentes stations.

M_B est l'erreur moyenne de la différence de g à la station et à de Bilt ou autrement dit: l'erreur moyenne de g par rapport au système de de Bilt. En y ajoutant de la manière ordinaire l'erreur moyenne $0,5 \cdot 10^{-3}$ cm.sec.⁻² de la comparaison de Bilt—Potsdam, on obtient l'erreur moyenne de g par rapport au système de Potsdam que nous désignerons par M_P , et en y ajoutant encore l'erreur moyenne $3 \cdot 10^{-3}$ cm.sec.⁻² de la détermination de g à Potsdam, on trouve l'erreur moyenne totale de g , que nous désignerons par M_g .

Nous faisons suivre ici les résultats de ce calcul pour toutes les stations.

$$M_P = \sqrt{M_B^2 + 0,25}$$

$$M_g = \sqrt{M_P^2 + 9,25}$$

Station.	M_P $10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$	M_N $10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$	Station.	M_P $10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$	M_N $10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$
Ameland	1.3	3.3	de Steeg	1.3	3.3
Terschelling	1.5	3.3	Ede	1.5	3.3
Cocksdorp	1.5	3.3	Amersfoort	1.2	3.2
Harlingen	1.3	3.3	Utrecht	2.4	3.9
Leeuwarden	1.3	3.3	Amsterdam	1.1	3.2
Buitenpost	1.5	3.3	Haarlem	1.2	3.2
Groningen	2.4	3.9	Gouda	1.5	3.3
Winschoten	1.5	3.3	Leiden	1.1	3.2
Assen	1.5	3.3	Delft	2.2	3.7
Sleen	2.4	3.9	Oud-Beijerland	1.5	3.3
Hoogeveen	1.5	3.3	Gorinchem	1.5	3.3
Steenwijk	1.5	3.3	Zierikzee	1.5	3.3
Heerenveen	1.5	3.3	Middelburg	1.5	3.3
Workum	1.5	3.3	Terneuzen	1.5	3.3
Helder	1.1	3.2	Bergen op Zoom	1.5	3.3
Schoorl	1.5	3.3	Breda	1.5	3.3
Hoorn	1.5	3.3	Oirschot	1.5	3.3
Enkhuizen	1.5	3.3	Oss	1.5	3.3
Urk	1.5	3.3	Sambeek	1.5	3.3
Wolberg	2.4	3.9	Deurne	1.5	3.3
Hollander	1.5	3.3	Blerick	1.5	3.3
Oldenzaal	1.2	3.2	Weert	1.1	3.2
Harikerberg	2.4	3.9	Sittard	1.5	3.3
Winterswijk	1.5	3.3	Maastricht	1.5	3.3
Apeldoorn	1.5	3.3	Ubagsberg	1.1	3.2

CHAPITRE VI.

Déduction de la pesanteur et des anomalies.

§ 1. Détermination de dg .

La différence dg de la pesanteur à une station et de celle à de Bilt est déduite au moyen de la formule ordinaire :

$$\begin{aligned} dg &= - \frac{2g}{T} dT. \\ &= - 0.3915 dT \text{ pour les pendules de bronze } (T = 0.501273) \\ &= - 0.3860 dT \text{ pour les pendules d'invar } (T = 0.508445) \end{aligned}$$

où dT est la différence de la valeur finale de T à la station et de celle à de Bilt; dT ne dépassant pas $400 \cdot 10^{-7}$ sec., le terme de l'ordre $\left(\frac{dT}{T}\right)^2$ est négligeable.

Pour les tournées où la différence de T à de Bilt au commencement et à la fin n'était que quelques unités de 10^{-7} sec., c'est à dire qu'elle ne dépassait pas sensiblement les erreurs de l'observation, nous avons pris la moyenne de ces deux valeurs de T pour le calcul de dT . Pour les tournées où cette différence était plus grande (1914, 1915 I et II, 1919) nous avons attribué cette différence à la variabilité des pendules, qui d'ailleurs, à l'exception du voyage de 1914 ne dépasse pas la valeur à laquelle on pourrait s'attendre par l'examen des autres observations, (Chap. V § 9), et nous l'avons distribué également sur tous les transports pendant le voyage. La valeur de T , calculée ainsi, a été employée pour le calcul de dT .

Pour la tournée de 1914 la différence susmentionnée ayant été assez grande, nous avons répété en 1915 les observations à la station médiane Leeuwarden et nous avons employé le résultat de ces observations à la déduction de T pour de Bilt au milieu du voyage de 1914. Pour les deux stations de la première moitié du voyage on a calculé dT de la valeur de T au commencement et de cette valeur médiane et pour les deux stations de la seconde moitié on l'a calculé de même de la valeur médiane et de la valeur à la fin.

Les valeurs de dg sont réunis dans le tableau de l'annexe 2.

§ 2. Détermination de g .

La détermination absolue de la pesanteur à Potsdam en 1898—1904 ¹⁾ a donné pour le „Pendelsaal” de l’Institut Géodésique :

$$g = 981.274 \pm 0.003 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Pour la détermination relative de Bilt—Potsdam nous observions dans une cave à environ 4 mètres plus bas, où g est donc :

$$g = 981.2753 \pm 0.003 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Nous trouvons pour la différence de la pesanteur à de Bilt et à Potsdam :

$$dg = -0.0083 \pm 0.0005 \text{ cm sec}^{-2}$$

donc la valeur qui s’en déduit pour la station centrale de Bilt est

$$g_B = 981.267 \text{ cm sec}^{-2}$$

avec une erreur moyenne absolue de 0.003 cmsec⁻² et une erreur moyenne de 0.0005 cmsec⁻² si on la considère par rapport au système de Potsdam.

Par la formule

$$g = g_B + dg$$

nous en déduisons les valeurs de la pesanteur aux différentes stations, que nous avons réunis dans le tableau de l’annexe 2. Nous y avons ajouté les erreurs moyennes de ces valeurs par rapport au système de de Bilt, les erreurs moyennes par rapport au système de Potsdam et les erreurs moyennes totales (chap. V §§ 10 et 11).

§ 3. Réduction de g au niveau de la mer.

La réduction de g a été exécutée de la manière ordinaire par la formule : ²⁾

$$g_0'' = g + \Delta g - \Delta g' + \Delta g''$$

g_0'' = la valeur qu’on aurait trouvée au niveau de la mer, si toutes les masses au dessus de ce niveau étaient écartées.

Δg = la réduction dans l’air au niveau de la mer.

$\Delta g'$ = l’attraction des masses entre deux plans horizontaux au niveau de la mer et au niveau de la station.

$\Delta g''$ = la réduction topographique, c’est à dire l’attraction des masses qu’on a ajoutées (ou bien de celles qu’on a supprimées avec le signe négatif) à la situation réelle pour obtenir une délimitation des masses par un plan horizontal au niveau de la station.

1) „Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam” von Prof. Dr. F. KÜHNEN und Prof. Dr. PH. FURTWÄNGLER.

2) Voir e.a.: Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. der Wiss. Berlin 1902 XXXVI: F. R. HELMERT, Über die Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein gemeinsames Niveau.

Nous avons choisi la méthode ordinairement acceptée pour la réduction, pour rendre les résultats plus facilement comparables aux résultats des pays limitrophes. D'autre part nous reconnaissons bien la justesse des remarques faites par HAYFORD et BOWIE¹⁾ qui ont démontré d'abord que la réduction produit une erreur considérable surtout par rapport aux masses à grande distance en substituant une couche plane à la couche véritable située sur la géoïde, et ensuite qu'il ne faut pas seulement tenir compte des masses prochaines, mais qu'il faut le faire de toutes les masses au-dessus du niveau de la mer sur la géoïde entière.

La méthode proposée par eux et exécutée pour toutes les observations dans les États-Unis ne satisfait pas seulement à cette demande, mais en acceptant l'hypothèse de l'isostasie complète, elle tient compte aussi pour la géoïde entière des défauts de masse prédites par cette hypothèse au-dessous du niveau de la mer.

En reconnaissant les avantages de cette méthode, nous avons cependant renoncé à l'application dans les Pays-Bas, puisque le travail exigé n'aurait pas de sens, si on ne l'appliquait pas en même temps aux résultats des pays limitrophes.

D'ailleurs les Pays-Bas n'ayant que de faibles différences d'altitude (200 m. au plus) et l'étendue étant restreinte, les réductions suivant les deux méthodes auront probablement une différence à peu près constante pour toutes les stations.

Détermination de Δg .

Δg est déterminé par la formule :

$$\Delta g = 0.3086 h \cdot 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$$

où h est l'altitude en mètres au-dessus de N.A.P.

L'altitude ne dépassant pas 200 mètres, le terme de l'ordre h^2 est négligeable. ²⁾ L'erreur moyenne de la détermination de h restant au-dessous de 10 cm, correspondant à une erreur de 0.0003 cm sec⁻² en Δg , l'erreur moyenne de Δg est négligeable.

Détermination de $\Delta g'$.

$\Delta g'$ est déterminé par la formule :

$$\Delta g' = \frac{3}{4} \frac{\theta}{\theta_m} \Delta g$$

où θ_m est la densité moyenne de la terre, pour laquelle nous avons pris la valeur

$$\theta_m = 5.52$$

θ est la densité moyenne des couches entre la station et le niveau de la mer.

1) The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity, by JOHN HAYFORD and WILLIAM BOWIE. (Special public. No. 10 and 12).

2) Voir : Astron. Geod. Arb. in der Schweiz 12. Band, Schwerebestimmungen, page 322.

M. le prof. VAN BAREN (Wageningen) nous a bien voulu communiquer les données suivantes.

Tourbe	$\theta = 2.03$
Sable fortement mélangé d'humus	$\theta = 2.45$
Sable faiblement mélangé d'humus	$\theta = 2.59$
Sable	$\theta = 2.65$
Sable contenant de l'argile	$\theta = 2.62$
Argile mélangée de sable	$\theta = 2.64$
Argile	$\theta = 2.70$
Löss	$\theta = 2.60$
Pierre calcaire	$\theta = 2.70$

En supposant que l'erreur moyenne du rapport $\frac{\theta}{\theta_m}$ ne dépasse pas 2 % on peut conclure que l'erreur moyenne de $\Delta g'$ n'atteint en général pas $0.1 \cdot 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$, sauf pour les stations Harikerberg, Wolberg, Oldenzaal, Sittard et Maastricht où elle a la valeur de $0.1 \cdot 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$ et pour la station d'Ubagsberg où elle atteint la valeur un peu plus considérable de $0.4 \cdot 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$.

Détermination de $\Delta g''$.

A cause des petites différences de l'altitude des terrains, la réduction topographique $\Delta g''$ est négligeable pour toutes les stations sauf pour trois où on a trouvé pour $\Delta g''$ par une évaluation sommaire des masses environnantes:

Harikerberg	$\Delta g'' = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$
Wolberg	$\Delta g'' = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ „ „}$
Ubagsberg	$\Delta g'' = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ „ „}$

Vu la petitesse du résultat l'erreur moyenne de cette détermination est négligeable.

Les résultats des déterminations de Δg , $\Delta g'$, $\Delta g''$ et g_0'' sont réunis dans le tableau de l'annexe 2.

§ 4. Détermination des anomalies.

Dans la publication „Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festlande”, 1915, ¹⁾ HELMERT donne une nouvelle formule pour la valeur normale de la pesanteur:

$$\gamma_0 = 978.052 (1 + 0.005285 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2 \varphi).$$

Nous avons employé cette formule pour le calcul des anomalies de g_0'' .

Dans la même publication HELMERT annonce que la valeur normale de

¹⁾ Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. der Wiss. Berlin 1915. XLI.

la pesanteur se laisse représenter encore un peu mieux par une formule où la longitude entre aussi :

$$g_0 = 978.052 (1 + 0.005285 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2 \varphi + \\ + 0.000018 \cos^2 \varphi \cos (2 \lambda + 17^\circ)).$$

La différence avec la formule précédente est à peu près constante pour les Pays-Bas, elle varie entre 0.0054 pour Winschoten dans le nord-est et 0.0061 pour Zierikzee dans le sud-ouest. Si on veut donc savoir les anomalies par rapport à cette seconde formule il faut soustraire 0.006 des anomalies calculées.

La vieille formule de HELMERT :

$$\gamma_0 = 978.030 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2 \varphi)$$

donne des anomalies plus grandes que la formule employée. La différence varie entre 0.0113 pour Ameland et 0.0120 pour Ubagsberg.

Pour donner une idée de la distribution des anomalies, nous les avons représentées dans la carte de l'annexe 3, où nous avons marqué aussi la valeur absolue et la direction de la déviation de la verticale. Nous avons tiré ces valeurs provisoires de la Triangulation du Royaume des Pays-Bas; „Latitudes, longitudes et azimuts des stations astronomiques” où on les a déterminées en prenant pour base l'ellipsoïde de Bessel et la latitude d'Amersfoort :

$$\varphi = 52^\circ 9' 22'',178$$

(voir aussi: de Stereographische Kaartprojectie in hare toepassing bij de Rijks-driehoeksmeting par Prof. Hk. J. HEUVELINK, c. i.).

La carte montre que les anomalies de la pesanteur s'accordent généralement parfaitement avec les déviations de la verticale, surtout si on ajouterait à celles-ci encore un petit vecteur constant dans la direction sud-est. Cela signifie donc que les déviations de la géoïde de l'ellipsoïde de BESSEL, indiquée plus haut, ou mieux encore d'une ellipsoïde qui en diffère par une petite rotation dans la direction sud-est, s'expliqueraient par l'attraction des mêmes masses locales que les anomalies de la pesanteur font soupçonner.

A Oirschot la grande valeur de la déviation de la verticale dans la direction du sud-ouest est un peu surprenante; elle s'expliquerait cependant par un surplus de masse dans le Nord de la Belgique. Si cette supposition est juste, l'anomalie négative constatée à Weert, n'aurait qu'une étendue très restreinte dans cette direction.

§ 5. Quelques remarques sur l'interprétation géologique des anomalies.

Nous avons remarqué déjà qu'en conséquence de l'absence de montagnes dans les Pays-Bas les résultats ne permettent pas de tirer des conclusions concernant l'hypothèse de l'isostasie. Les déviations constatées ne fournissent pas

une preuve que l'isostatie est plus ou moins défectueuse. Elles peuvent s'expliquer aussi bien par une distribution anormale des masses dans les couches supérieures, sans que la masse totale des cylindres verticaux, s'étendant jusqu'au plan d'équilibre isostatique, montre des déviations.

M. BOWIE ¹⁾ a constaté dans les États-Unis, qu'après la réduction isostatique les anomalies sont généralement positifs aux terrains où les couches anciennes (précambriennes) se montrent à la surface, tandis que là ou on trouve des couches cénozoïques, le signe négatif prévaut. Cette expérience ne se confirme qu'incomplètement dans les Pays-Bas.

Les couches anciennes ne viennent à la surface que dans la partie sud-est des Pays-Bas, tandis qu'elles s'enfoncent de plus en plus vers l'ouest et vers le nord, où elles sont couvertes d'une forte couche diluviale et alluviale. Dans le sud-ouest cette couche est moins profonde que plus au nord, ce qui est probablement la cause que les mouvements du sol occasionnés par la Mer du Nord sont beaucoup moins violents là qu'ailleurs près de la côte.

Les anomalies de g ne trahissent rien de cette disposition générale: elles ne sont pas plus petites dans le nord-ouest que dans le sud-est et ils montrent même un maximum avec signe positif près de Terschelling et un autre plus prononcé encore près de Gouda. Dans le nord-est au contraire où les couches anciennes se sont enfoncées beaucoup moins, il y a un minimum assez profond (Leeuwarden, Buitenpost, Groningen, Ameland etc.)

La distribution des anciennes couches dans l'est et dans le sud-est sont indiquées sommairement dans la carte de l'annexe 4.

Dans la partie extrême du sud-est les couches primaires se montrent à la surface, aux autres parties, hachées par-ci par-là, les couches secondaires et tertiaires, tandis qu'elles sont couvertes partiellement par des dépôts fluviaux qui ont rempli aussi les parties affaissées qui les séparent. Ces dépressions tectoniques ont généralement une direction sud-est—nord-ouest.

La dépression entre les parties I et II est la plus prononcée de toutes; on suppose qu'elle se prolonge en s'élargissant vers le nord-ouest au moins jusqu'à la côte. Le minimum des anomalies de g près de Weert—Oirschot s'accorde assez bien avec la situation de cette dépression, mais vers le nord-ouest il disparaît et on trouve même un maximum à Gouda.

Les deux terrains anciens I et II ne s'expriment pas dans les anomalies,

1) Voir BOWIE et HAYFORD: The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity; Spec. Publ. No. 10 et 12.

BOWIE: Some geologic conclusions from geodetic data (Proc. of the Nat. Acad. of Sciences of the U.S.A. Vol. 7 No. 1).

BOWIE: Theory of isostasy—A geological problem (Bulletin of the Geological Society of America, June 30, 1922, Vol. 33).

BOWIE: The earths crust and isostasy (the Geograph. Rev. Vol. XII No. 4, Oct. 1922).

même quand on ajouterait quelques unités de 10^{-3} cm. sec.⁻² afin de tenir compte de l'action locale de l'isostasie (l'élévation de toute cette partie varie de 30 à 200 mètres au dessus du niveau de la mer) le signe reste négatif. Seulement les terrains III et IV sont accompagnés d'anomalies positives, qui se prolongent même assez loin vers le nord-ouest par une bande assez étroite mais très prononcée. Elle ne disparaît que près de Heerenveen, mais il me semble qu'il y a lieu d'y rattacher le maximum de Terschelling situé plus loin dans la même direction.

Nous avons encore comparé les résultats avec ceux obtenus par le Dr. VAN RIJCKEVORSEL concernant la distribution de l'intensité et de la direction de la force magnétique ¹⁾ sans trouver d'ailleurs des relations nettes.

Il n'y avait qu'une faible concordance pour le maximum de Terschelling et le minimum de Buitenpost; le Dr. VAN RIJCKEVORSEL y trouvait des déviations de l'intensité dans le même sens. Le minimum à Weert aussi coïncide avec un résultat analogue, mais la déviation négative qu'il trouve s'étend beaucoup plus loin vers le nord-ouest jusqu'à la côte de Hoek van Holland et Leiden.

Les autres particularités de la distribution des anomalies de g paraissent être absolument indépendantes des anomalies du magnétisme. Il faut donc tirer la conclusion peu surprenante d'ailleurs, qu'il n'y a presque pas de parallélisme entre les deux phénomènes.

1) A magnetic survey of the Netherlands for the epoch January 1 1891 by Dr. VAN RIJCKEVORSEL. Voir aussi: Het opsporen van bodembewegingen door waterpassingen, magnetische en andere waarnemingen, door ir. BLAUPOT TEN CATE.

ERRATA.

Page	3,	ligne 35,	<i>au lieu de</i> :	même	<i>lisez</i> :	mêmes.
"	5,	" 14,	" " "	: europe	" :	Europe.
"	7,	Fig. 1,	" " "	: Θ	" :	θ .
"	8,	Fig. 2,	" " "	: Θ , Θ' , a	" :	θ , θ' , a.
"	11,	ligne 15,	" " "	: Bijdrage	" :	Bijdragen.
"	13,	Fig. 4,	" " "	: δq^t , δa_1^t ,	" :	δq_1^t , δa_1^t .
"	14,	ligne 12,	" " "	: difference	" :	différence.
"	29,	lignes 7, 10, 11, 14 et 15	<i>au lieu de</i> :	réseau	<i>lisez</i> :	faisceau.
"	62,	ligne 24,	<i>biffez une fois les mots</i> :	de la correction.		
"	63,	" 9,	<i>au lieu de</i> :	fixes	<i>lisez</i> :	fixe.
"	63,	" 23,	" " "	: côte	" :	côté.
"	115,	lignes 1 et 6,	" " "	: <i>l'indice</i> ω	" :	ω .
"	116,	ligne 2	" " "	: M_ω	" :	$M_{\omega'}$.
"	131,	en-tête de la 1 ^e colonne,	<i>ajoutez</i> :	1915.		



PLANCHE I.

Appareil „Von Sterneck” avec quatre pendules dont deux visibles. A gauche le thermomètre encastré dans un corps pendulaire. Sur le bord gauche de l'appareil un niveau.

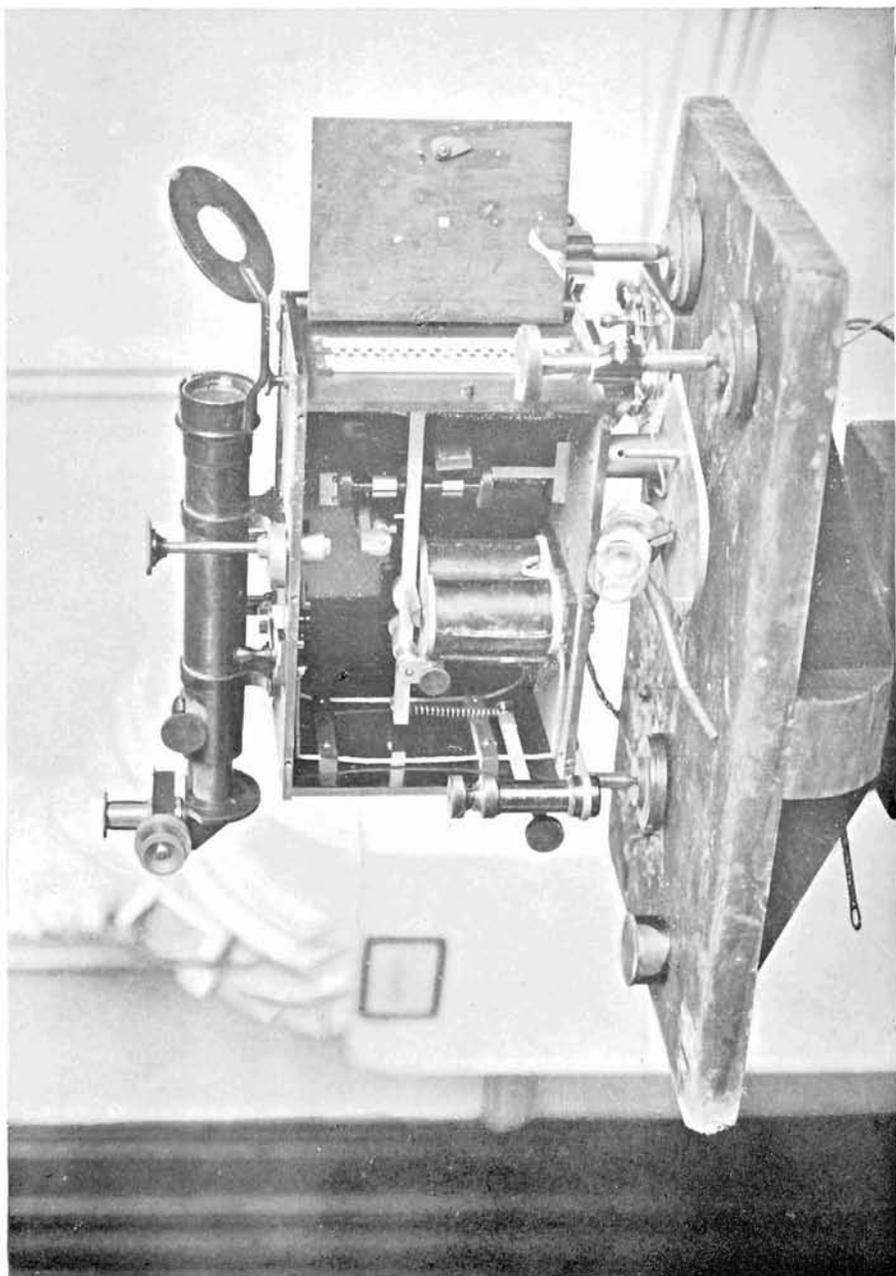


PLANCHE II.

Appareil de coïncidence. En bas lampe électrique. Après montage la lumière, réfléti par le miroir à gauche de l'échelle, sort par l'ouverture au milieu de l'échelle si le levier obturateur est activé.

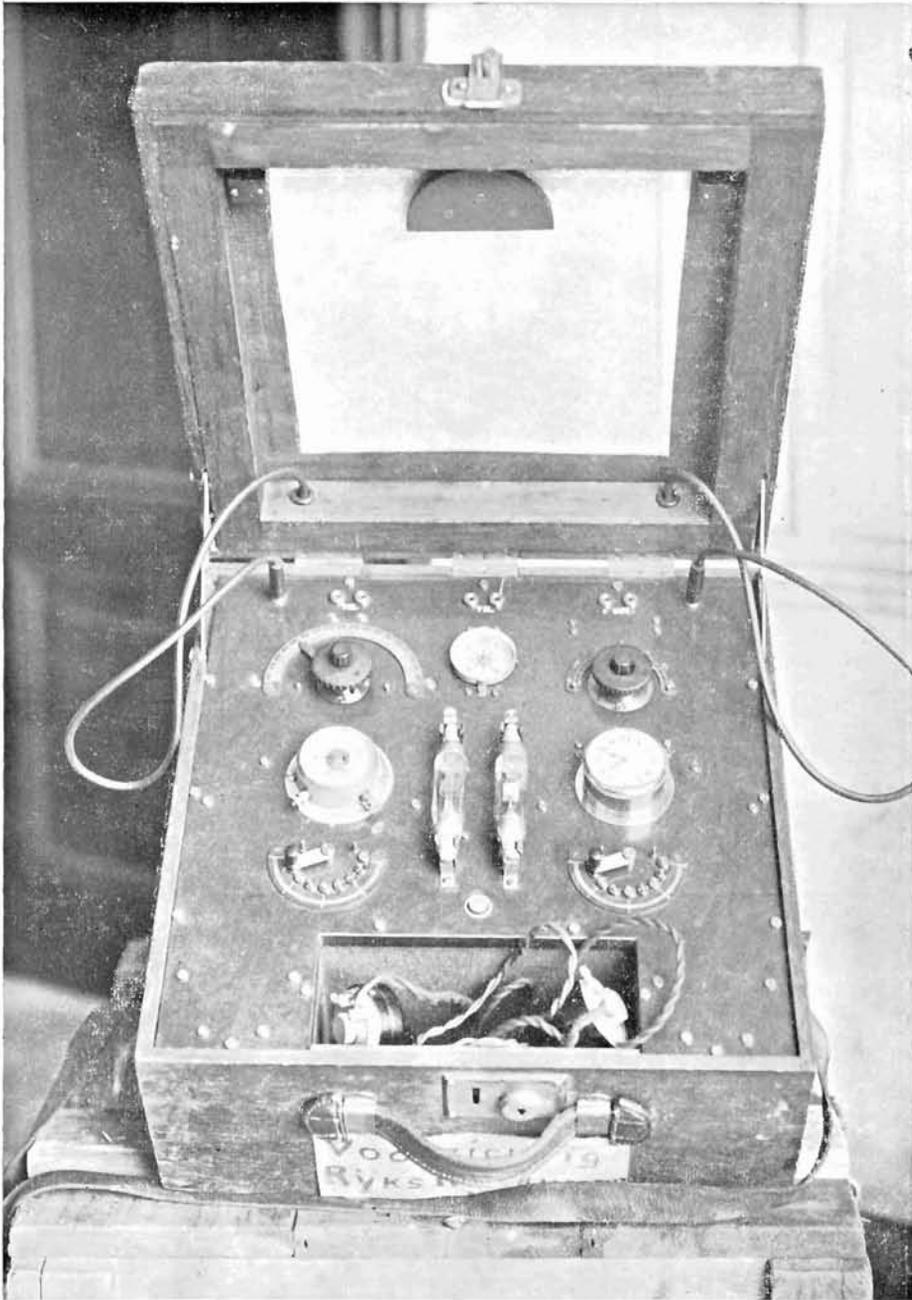


PLANCHE III.
Appareil récepteur des signaux radiotélégraphiques.

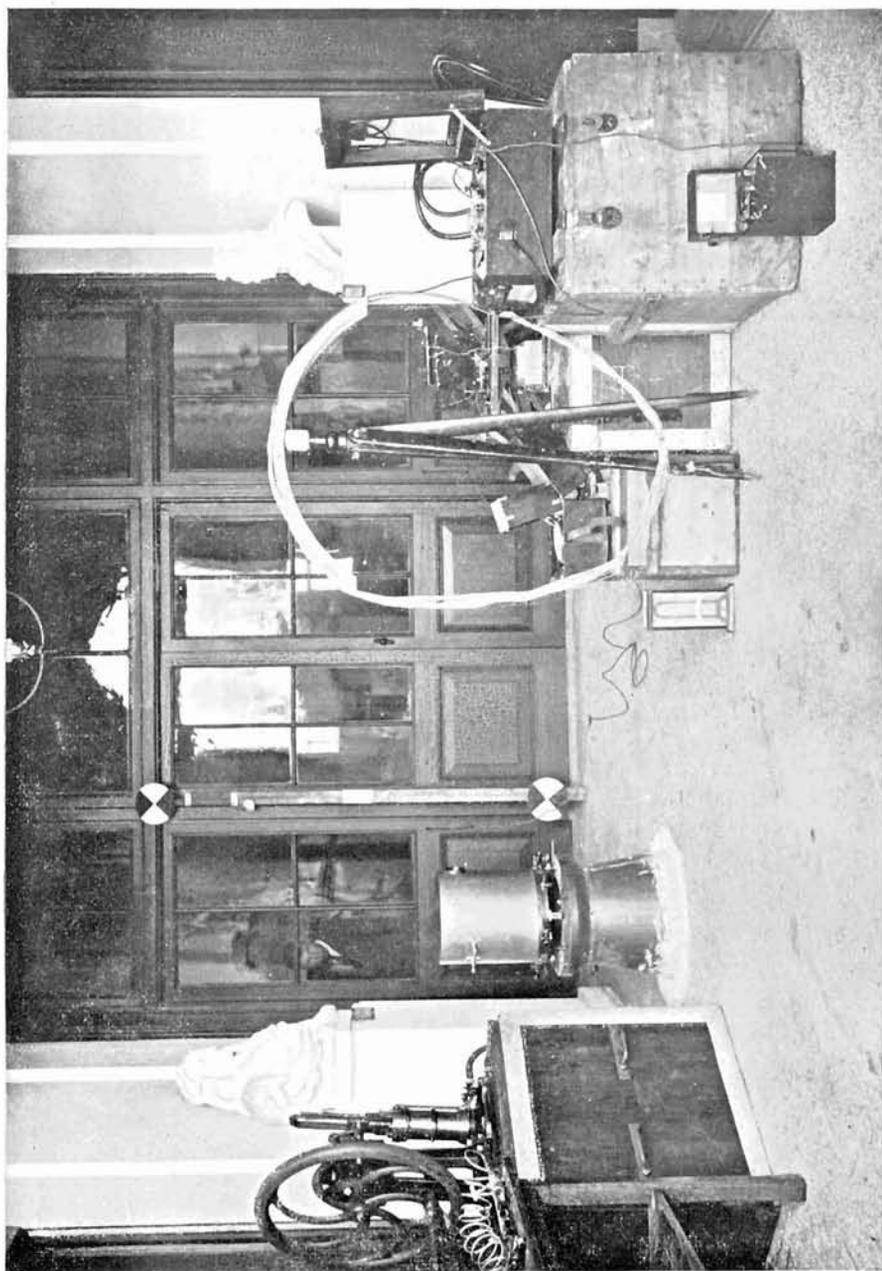


PLANCHE IV.

Ensemble; de gauche à droite: Machine pneumatique, appareil VON STERNECK, mire de nivellement, en bas: hygromètre, appareil de coïncidence avec chronomètre, au premier plan: cadre mobile soutenu par le trépied du niveau, appareil de réception avec accumulateur.

Station.	Localité.	Latitude φ .	Longitude λ . Est de Greenwich.
De Bilt	Sous-sol de l'Institut Météorologique	52° 6' 10"	5° 10' 42"
Ameland * . .	Hangar du canot de sauvetage	53° 26' 55"	5° 46' 14"
Amersfoort . .	Cave du „Heiligenberg”	52° 8' 25"	5° 24' 38"
Amsterdam . .	Sous-sol du Laboratoire de Chimie de l'Université .	52° 21' 55"	4° 54' 43"
Apeldoorn . .	Vestibule du „H.B.S. m. 5-j. c.”	52° 13' 17"	5° 57' 47"
Assen	Cave de la Préfecture	52° 59' 41"	6° 33' 56"
Bergen op Zoom	Cathédrale	51° 29' 42"	4° 17' 20"
Blerick	Lavoir du bâtiment IV de la caserne	51° 22' 26"	6° 9' 37"
Breda	Cave de l'Académie Militaire	51° 35' 32"	4° 46' 32"
Buitenpost . .	Hangar du Restaurant Bolling	53° 15' 20"	6° 8' 31"
Cocksdorp . .	Hangar sur la digue près du port	53° 9' 32"	4° 52' 33"
Delft	Institut Géodésique	52° 0' 34"	4° 22' 8"
Deurne	Garage de l'hôtel Baars	51° 27' 29"	5° 47' 10"
Ede	Cercle des officiers, Caserne de Cavalerie	52° 2' 9"	5° 40' 32"
Enkhuizen . .	Dromedaris	52° 42' 6"	5° 17' 37"
Gorinchem . .	Violon du bureau de police	51° 49' 50"	4° 58' 34"
Gouda	Rez-de-chaussée du H.B.S.	52° 0' 47"	4° 42' 53"
Groningen * .	Cave de l'Université, section astronomique	53° 13' 15"	6° 33' 57"
Haarlem . . .	Cave du bâtiment du „Haven en Marktwezen” . . .	52° 22' 55"	4° 38' 4"
Harikerberg *	Tour de M. le Comte Bentinck	52° 14' 12"	6° 32' 26"
Harlingen . .	Cuisine de l'anc. demeure de l'architecte municipal.	53° 10' 25"	5° 25' 2"
Heerenveen .	Cave du „Crack-State”	52° 57' 44"	5° 55' 22"
Helder	Casemate près de l'entrée du port	52° 57' 58"	4° 46' 42"
Hollander . .	Cave du potager du Sanatorium „Hellendoorn” . . .	52° 24' 15"	6° 24' 57"
Hoogeveen . .	Cave de l'hôtel Frederiks	52° 43' 35"	6° 28' 42"
Hoorn	Cave de l'Hôtel de ville	52° 38' 32"	5° 3' 37"
Leeuwarden *	Cave de la „Friesche Levensverzekering”	53° 12' 16"	5° 48' 17"
„	Verfhok Scheepstimmerwerf „Arendstein”	53° 12' 21"	5° 48' 14"
Leiden * . . .	Rez-de-chaussée de l'Observatoire	52° 9' 21"	4° 29' 5"
Maastricht . .	Cave centrale de l'Hôtel de ville	50° 51' 10"	5° 41' 34"
Middelburg . .	Vestibule de la salle des séances des „États Prov.”	51° 30' 3"	3° 36' 51"
Oirschot. * . .	Cave du „R.C. Bondsgebouw”	51° 30' 18"	5° 18' 25"
Oldenzaal . .	Bâtiment au sud du choeur de l'Église „Plechelmi”	52° 18' 47"	6° 55' 50"
Oss	Hangar de la fabrique de „Van den Berg”	51° 46' 10"	5° 31' 44"
Oud-Beijerland	Beurrerie de M. G. Vink	51° 49' 26"	4° 25' 1"
Sambeek * . .	Lavoir derrière la maison de M. van Tilburg	51° 38' 13"	5° 57' 59"
Schoorl * . . .	Garderobe de l'école primaire	52° 42' 5"	4° 41' 37"
Sittard	Cave sous le vestibule de l' „Ambachtsschool” . . .	50° 59' 46"	5° 51' 36"
Sleen *	Cave de la ferme de M. Honing	52° 46' 30"	6° 48' 7"
De Steeg . . .	Écurie de „Rhederoord”	52° 1' 18"	6° 3' 28"
Steenwijk . .	Cave du nouvel Hôtel de ville	52° 47' 19"	6° 6' 46"
Terneuzen . .	Hangar du „Levensmiddelenbedrijf”	51° 20' 10"	3° 49' 47"
Terschelling *	Cave de l'École navale	53° 21' 36"	5° 12' 53"
Ubagsberg * .	Hangar de la ferme C 52 (prop. M. Schneiders) . .	50° 51' 2"	5° 57' 14"
Urk *	Local derrière la poissonnerie municipale	52° 39' 43"	5° 35' 50"
Utrecht * . . .	Cave de l'Observatoire	52° 5' 11"	5° 7' 49"
Weert	Cave du chauffage central de l'Église catholique . .	51° 15' 16"	5° 42' 30"

Stations pendulaires.

Localité.	Latitude φ .	Longitude λ . Est de Greenwich.	Altitude au dessus de N.A.P. en mètres.	s.		Année No. de la tournée.
				Dirrec- tion 1-3	Dirrec- tion 2-4	
				10^{-7} sec.	10^{-7} sec.	
Météorologique	52° 6' 10"	5° 10' 42"	+ 2.10			
Couvantage	53° 26' 55"	5° 46' 14"	+ 3.85	83	75	1915 I
"	52° 8' 25"	5° 24' 38"	+ 2.07	50	47	1915 II
de Chimie de l'Université .	52° 21' 55"	4° 54' 43"	+ 0.12	62	50	1920 II
m. 5-j. c."	52° 13' 17"	5° 57' 47"	+ 19.57	41	38	1920 II
"	52° 59' 41"	6° 33' 56"	+ 9.70	57	43	1918
"	51° 29' 42"	4° 17' 20"	+ 10.28	46	34	1919
de la caserne.	51° 22' 26"	6° 9' 37"	+ 18.25	40	41	1920 I
Militaire.	51° 35' 32"	4° 46' 32"	+ 0.66	56	41	1919
Bolling	53° 15' 20"	6° 8' 31"	+ 1.32	40	43	1920 II
près du port.	53° 9' 32"	4° 52' 33"	+ 2.13	61	61	1915 II
"	52° 0' 34"	4° 22' 8"	+ 2.00	32	40	1914
"	51° 27' 29"	5° 47' 10"	+ 25.60	40	42	1920 I
serne de Cavalerie	52° 2' 9"	5° 40' 32"	+ 33.54	39	39	1919
"	52° 42' 6"	5° 17' 37"	+ 2.78	82	73	1915 II
police	51° 49' 50"	4° 58' 34"	+ 2.69	65	41	1918
"	52° 0' 47"	4° 42' 53"	+ 0.30	52	44	1920 II
ection astronomique.	53° 13' 15"	6° 33' 57"	+ 5.00	43	37	1914
"Haven en Marktwezen" . . .	52° 22' 55"	4° 38' 4"	+ 3.16	41	37	1920 II
Bentinck	52° 14' 12"	6° 32' 26"	+ 48.19	47	41	1913
ure de l'architecte municipal.	53° 10' 25"	5° 25' 2"	+ 4.44	60	52	1915 II
"	52° 57' 44"	5° 55' 22"	+ 0.06	35	43	1920 II
rée du port.	52° 57' 58"	4° 46' 42"	+ 5.90	37	44	1920 II
anatorium „Hellendoorn" . . .	52° 24' 15"	6° 24' 57"	+ 11.14	70	52	1918
ks	52° 43' 35"	6° 28' 42"	+ 10.82	67	84	1920 II
le	52° 38' 32"	5° 3' 37"	— 0.51	32	40	1920 II
Levensverzekering"	53° 12' 16"	5° 48' 17"	+ 0.96	46	40	1914
erwerf „Arendstein"	53° 12' 21"	5° 48' 14"	+ 2.28	66	54	1915 II
bservatoire	52° 9' 21"	4° 29' 5"	+ 2.30	54	46	1915 I
el de ville	50° 51' 10"	5° 41' 34"	+ 49.30	44	43	1920 I
es séances des „États Prov."	51° 30' 3"	3° 36' 51"	+ 6.35	55	55	1919
gebouw"	51° 30' 18"	5° 18' 25"	+ 15.52	44	46	1920 I
oeur de l'Église „Plechelmi"	52° 18' 47"	6° 55' 50"	+ 47.14	60	56	1920 II
de „Van den Berg"	51° 46' 10"	5° 31' 44"	+ 6.95	72	60	1918
Wink	51° 49' 26"	4° 25' 1"	+ 0.51	45	45	1919
on de M. van Tilburg	51° 38' 13"	5° 57' 59"	+ 14.81	84	73	1920 I
rimaire	52° 42' 5"	4° 41' 37"	+ 8.54	70	52	1915 I
de l' „Ambachtsschool"	50° 59' 46"	5° 51' 36"	+ 47.62	39	40	1920 I
M. Honing	52° 46' 30"	6° 48' 7"	+ 16.36	48	43	1914
"	52° 1' 18"	6° 3' 28"	+ 29.36	63	42	1918
l de ville	52° 47' 19"	6° 6' 46"	+ 3.30	57	46	1918
ddelenbedrijf"	51° 20' 10"	3° 49' 47"	+ 0.62	45	45	1919
"	53° 21' 36"	5° 12' 53"	+ 5.59	59	53	1915 I
52 (prop. M. Schneiders) . . .	50° 51' 2"	5° 57' 14"	+ 191.37	64	57	1920 I
onnerie municipale.	52° 39' 43"	5° 35' 50"	+ 2.45	66	56	1915 I
"	52° 5' 11"	5° 7' 49"	+ 4.54	42	36	1914
tral de l'Église catholique . . .	51° 15' 16"	5° 42' 30"	+ 32.80	41	38	1920 I
"	52° 8' 11"	5° 1' 11"	+ 1.11	60	60	1915 II

De Bilt	Sous-sol de l'Institut Météorologique	52° 6' 10"	5° 10' 42"
Ameland * . .	Hangar du canot de sauvetage	53° 26' 55"	5° 46' 14"
Amersfoort . .	Cave du „Heiligenberg”	52° 8' 25"	5° 24' 38"
Amsterdam . .	Sous-sol du Laboratoire de Chimie de l'Université .	52° 21' 55"	4° 54' 43"
Apeldoorn . .	Vestibule du „H.B.S. m. 5-j. c.”	52° 13' 17"	5° 57' 47"
Assen	Cave de la Préfecture	52° 59' 41"	6° 33' 56"
Bergen op Zoom	Cathédrale	51° 29' 42"	4° 17' 20"
Blerick	Lavoir du bâtiment IV de la caserne	51° 22' 26"	6° 9' 37"
Breda	Cave de l'Académie Militaire	51° 35' 32"	4° 46' 32"
Buitenpost . .	Hangar du Restaurant Bolling	53° 15' 20"	6° 8' 31"
Cocksdoorp . .	Hangar sur la digue près du port	53° 9' 32"	4° 52' 33"
Delft	Institut Géodésique	52° 0' 34"	4° 22' 8"
Deurne	Garage de l'hôtel Baars	51° 27' 29"	5° 47' 10"
Ede	Cercle des officiers, Caserne de Cavalerie	52° 2' 9"	5° 40' 32"
Enkhuizen . .	Dromedaris	52° 42' 6"	5° 17' 37"
Gorinchem . .	Violon du bureau de police	51° 49' 50"	4° 58' 34"
Gouda	Rez-de-chaussée du H.B.S.	52° 0' 47"	4° 42' 53"
Groningen * .	Cave de l'Université, section astronomique	53° 13' 15"	6° 33' 57"
Haarlem	Cave du bâtiment du „Haven en Marktwezen” . . .	52° 22' 55"	4° 38' 4"
Harikerberg *	Tour de M. le Comte Bentinck	52° 14' 12"	6° 32' 26"
Harlingen . .	Cuisine de l'anc. demeure de l'architecte municipal.	53° 10' 25"	5° 25' 2"
Heerenveen . .	Cave du „Crack-State”	52° 57' 44"	5° 55' 22"
Helder	Casemate près de l'entrée du port	52° 57' 58"	4° 46' 42"
Hollander . . .	Cave du potager du Sanatorium „Hellendoorn” . . .	52° 24' 15"	6° 24' 57"
Hoogeveen . .	Cave de l'hôtel Frederiks	52° 43' 35"	6° 28' 42"
Hoorn	Cave de l'Hôtel de ville	52° 38' 32"	5° 3' 37"
Leeuwarden *	Cave de la „Friesche Levensverzekering”	53° 12' 16"	5° 48' 17"
„	Verfhok Scheepstimmerwerf „Arendstein”	53° 12' 21"	5° 48' 14"
Leiden *	Rez-de-chaussée de l'Observatoire	52° 9' 21"	4° 29' 5"
Maastricht . .	Cave centrale de l'Hôtel de ville	50° 51' 10"	5° 41' 34"
Middelburg . .	Vestibule de la salle des séances des „États Prov.”	51° 30' 3"	3° 36' 51"
Oirschot. * . .	Cave du „R. C. Bondsgebouw”	51° 30' 18"	5° 18' 25"
Oklenzaal . . .	Bâtiment au sud du chœur de l'Église „Plechelmi”	52° 18' 47"	6° 55' 50"
Oss	Hangar de la fabrique de „Van den Berg”	51° 46' 10"	5° 31' 44"
Oud-Beijerland	Benrerie de M. G. Vink	51° 49' 26"	4° 25' 1"
Sambeek * . . .	Lavoir derrière la maison de M. van Tilburg	51° 38' 13"	5° 57' 59"
Schoorl * . . .	Garderobe de l'école primaire	52° 42' 5"	4° 41' 37"
Sittard	Cave sous le vestibule de l'„Ambachtsschool” . . .	50° 59' 46"	5° 51' 36"
Sleen *	Cave de la ferme de M. Honing	52° 46' 30"	6° 48' 7"
De Steeg	Écurie de „Rhederoord”	52° 1' 18"	6° 3' 28"
Steenwijk . . .	Cave du nouvel Hôtel de ville	52° 47' 19"	6° 6' 46"
Terneuzen . . .	Hangar du „Levensmiddelenbedrijf”	51° 20' 10"	3° 49' 47"
Terschelling *	Cave de l'École navale	53° 21' 36"	5° 12' 53"
Ubagsberg * . .	Hangar de la ferme C 52 (prop. M. Schneiders) . .	50° 51' 2"	5° 57' 14"
Urk *	Local derrière la poissonnerie municipale	52° 39' 43"	5° 35' 50"
Utrecht *	Cave de l'Observatoire	52° 5' 11"	5° 7' 49"
Weert	Cave du chauffage central de l'Église catholique . .	51° 15' 16"	5° 42' 30"
Winschoten . .	Cave des archives sous le H.B.S.	53° 8' 42"	7° 2' 25"
Winterswijk . .	Cave du H.B.S.	51° 58' 18"	6° 43' 30"
Wolberg * . . .	Cave de la cantine des sous-officiers	52° 23' 23"	5° 55' 2"
Workum	„Waaq” sur la Place	52° 58' 50"	5° 26' 36"
Zierikzee * . .	Hangar du meunier M. de Rijke	51° 39' 5"	3° 55' 10"

* Station astronomique.

Lieu.	Latitude φ .		Longitude λ .		de N.A.P.		Elevation		No. de la tournée.
	Greenwich.		en mètres.		1-3	2-4			
Baromètre	52° 6' 10"	5° 10' 42"	+	2.10	10 ⁻⁷ sec.	10 ⁻⁷ sec.			
Étage	53° 26' 55"	5° 46' 14"	+	3.85	83	75		1915 I	
École de Chimie de l'Université	52° 8' 25"	5° 24' 38"	+	2.07	50	47		1915 II	
5-j. c."	52° 21' 55"	4° 54' 43"	+	0.12	62	50		1920 II	
	52° 13' 17"	5° 57' 47"	+	19.57	41	38		1920 II	
	52° 59' 41"	6° 33' 56"	+	9.70	57	43		1918	
	51° 29' 42"	4° 17' 20"	+	10.28	46	34		1919	
de la caserne.	51° 22' 26"	6° 9' 37"	+	18.25	40	41		1920 I	
de la caserne.	51° 35' 32"	4° 46' 32"	+	0.66	56	41		1919	
du port.	53° 15' 20"	6° 8' 31"	+	1.32	40	43		1920 II	
	53° 9' 32"	4° 52' 33"	+	2.13	61	61		1915 II	
	52° 0' 34"	4° 22' 8"	+	2.00	32	40		1914	
	51° 27' 29"	5° 47' 10"	+	25.60	40	42		1920 I	
de Cavalerie	52° 2' 9"	5° 40' 32"	+	33.54	39	39		1919	
	52° 42' 6"	5° 17' 37"	+	2.78	82	73		1915 II	
	51° 49' 50"	4° 58' 34"	+	2.69	65	41		1918	
	52° 0' 47"	4° 42' 53"	+	0.30	52	44		1920 II	
Observatoire astronomique.	53° 13' 15"	6° 33' 57"	+	5.00	43	37		1914	
aven en Marktwezen"	52° 22' 55"	4° 38' 4"	+	3.16	41	37		1920 II	
Antinck	52° 14' 12"	6° 32' 26"	+	48.19	47	41		1913	
de l'architecte municipal.	53° 10' 25"	5° 25' 2"	+	4.44	60	52		1915 II	
	52° 57' 44"	5° 55' 22"	+	0.06	35	43		1920 II	
du port.	52° 57' 58"	4° 46' 42"	+	5.90	37	44		1920 II	
Observatoire „Hellendoorn"	52° 24' 15"	6° 24' 57"	+	11.14	70	52		1918	
	52° 43' 35"	6° 28' 42"	+	10.82	67	84		1920 II	
	52° 38' 32"	5° 3' 37"	—	0.51	32	40		1920 II	
Assurances „Verzekering"	53° 12' 16"	5° 48' 17"	+	0.96	46	40		1914	
„Arendstein"	53° 12' 21"	5° 48' 14"	+	2.28	66	54		1915 II	
Observatoire	52° 9' 21"	4° 29' 5"	+	2.30	54	46		1915 I	
de ville	50° 51' 10"	5° 41' 34"	+	49.30	44	43		1920 I	
Séances des „États Prov."	51° 30' 3"	3° 36' 51"	+	6.35	55	55		1919	
„bouw"	51° 30' 18"	5° 18' 25"	+	15.52	44	46		1920 I	
de l'Église „Plechelmi"	52° 18' 47"	6° 55' 50"	+	47.14	60	56		1920 II	
„Van den Berg"	51° 46' 10"	5° 31' 44"	+	6.95	72	60		1918	
de M. van Tilburg	51° 49' 26"	4° 25' 1"	+	0.51	45	45		1919	
de M. van Tilburg	51° 38' 13"	5° 57' 59"	+	14.81	84	73		1920 I	
maire	52° 42' 5"	4° 41' 37"	+	8.54	70	52		1915 I	
de l'„Ambachtsschool"	50° 59' 46"	5° 51' 36"	+	47.62	39	40		1920 I	
Honing	52° 46' 30"	6° 48' 7"	+	16.36	48	43		1914	
	52° 1' 18"	6° 3' 28"	+	29.36	63	42		1918	
de ville	52° 47' 19"	6° 6' 46"	+	3.30	57	46		1918	
„bedrijf"	51° 20' 10"	3° 49' 47"	+	0.62	45	45		1919	
	53° 21' 36"	5° 12' 53"	+	5.59	59	53		1915 I	
(prop. M. Schneiders)	50° 51' 2"	5° 57' 14"	+	191.37	64	57		1920 I	
de la mairie municipale.	52° 39' 43"	5° 35' 50"	+	2.45	66	56		1915 I	
	52° 5' 11"	5° 7' 49"	+	4.54	42	36		1914	
de l'Église catholique	51° 15' 16"	5° 42' 30"	+	32.80	41	38		1920 I	
de H.B.S.	53° 8' 42"	7° 2' 25"	+	0.26	53	61		1920 II	
	51° 58' 18"	6° 43' 30"	+	31.87	59	43		1918	
de officiers	52° 23' 23"	5° 55' 2"	+	59.16	44	36		1913	
	52° 58' 50"	5° 26' 36"	+	1.17	55	57		1920 II	
de Rijke	51° 39' 5"	3° 55' 10"	+	1.25	75	75		1919	

ANNEXE 2.

Détermination de g et des anomalies.

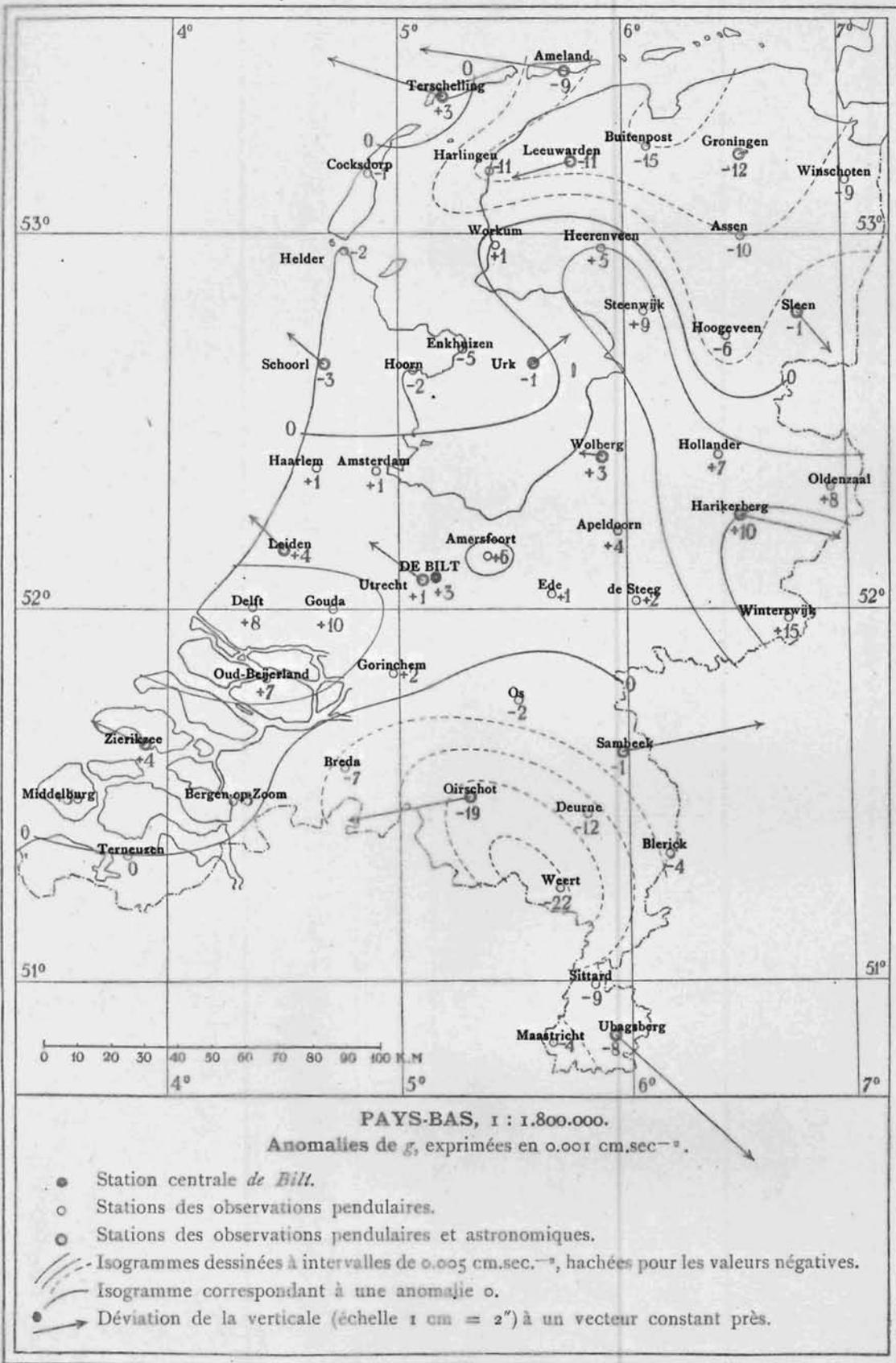
Station.	Terrain.	dT	dg	g	Erreur moy. de g			Δg	$\Delta g'$	Δg
					p. r. à de Bilt	p. r. à Potsdam	valeur absolue			
		10^{-7} sec	10^{-3} cm sec $^{-2}$		10^{-3} cm sec $^{-2}$				10^{-3} cm sec $^{-2}$	
De Bilt	sable mélangé d'humus			981.267.0		0.5	3.1	0.6	—	0.2
Ameland . . .	sable	— 269.8	+ 104.0	981.371.0	1.2	1.3	3.3	1.2	—	0.4
Amersfoort . .	sable mélangé d'humus	— 16.9	+ 6.5	981.273.5	1.1	1.2	3.2	0.6	—	0.2
Amsterdam . .	tourbe	— 55.1	+ 21.3	981.288.3	1.0	1.1	3.2	0.0	—	0.0
Apeldoorn . .	sable	— 22.1	+ 8.5	981.275.5	1.4	1.5	3.3	6.0	—	3.0
Assen	sable	— 163.2	+ 63.0	981.330.0	1.4	1.5	3.3	3.0	—	1.1
Bergen op Zoom	argile. . . .	+ 143.6	— 55.4	981.211.6	1.4	1.5	3.3	3.2	—	1.2
Blerick	sable	+ 191.5	— 73.9	981.193.1	1.4	1.5	3.3	5.6	—	2.0
Breda	sable	+ 140.1	— 54.1	981.212.9	1.4	1.5	3.3	0.2	—	0.1
Buitenpost . .	tourbe	— 213.3	+ 82.3	981.349.3	1.4	1.5	3.3	0.4	—	0.1
Cocksdorp . .	sable	— 226.1	+ 87.2	981.354.2	1.4	1.5	3.3	0.7	—	0.3
Delft.	tourbe	+ 7.3	— 2.9	981.264.1	2.1	2.2	3.7	0.6	—	0.2
Deurne	sable	+ 198.2	— 76.4	981.190.6	1.4	1.5	3.3	7.9	—	2.8
Ede	sable	+ 37.3	— 14.4	981.252.6	1.4	1.5	3.3	10.4	—	3.7
Enkhuizen . .	argile. . . .	— 114.5	+ 44.3	981.311.3	1.4	1.5	3.3	0.9	—	0.3
Gorinchem . .	argile. . . .	+ 66.4	— 25.6	981.241.4	1.4	1.5	3.3	0.8	—	0.3
Gonda	tourbe	+ 2.8	— 1.1	981.265.9	1.4	1.5	3.3	0.1	—	0.0
Groningen . .	sable	— 208.0	+ 81.5	981.348.5	2.4	2.4	3.9	1.5	—	0.5
Haarlem. . . .	tourbe	— 57.2	+ 22.1	981.289.1	1.1	1.2	3.2	1.0	—	0.4
Harikerberg. .	sable	— 22.7	+ 8.9	981.275.9	2.4	2.4	3.9	14.9	—	5.4
Harlingen. . .	argile. . . .	— 204.5	+ 78.9	981.345.9	1.2	1.3	3.3	1.4	—	0.5
Heerenveen. .	tourbe	— 200.7	+ 77.4	981.344.4	1.4	1.5	3.3	0.0	—	0.0
Hekler	sable	— 180.5	+ 69.7	981.336.7	1.0	1.1	3.2	1.8	—	0.6
Hollander. . .	sable	— 74.5	+ 28.7	981.295.7	1.4	1.5	3.3	3.4	—	1.2
Hoogeveen . .	tourbe	— 113.7	+ 43.9	981.310.9	1.4	1.5	3.3	3.3	—	0.8
Hoorn.	argile. . . .	— 110.4	+ 42.6	981.309.6	1.4	1.5	3.3	— 0.2	+	0.1
Leeuwarden. .	argile. . . .	— 211.1	+ 81.5	981.348.5	1.2	1.3	3.3	0.7	—	0.3
Leiden.	argile. . . .	— 15.8	+ 6.1	981.273.1	1.0	1.1	3.2	0.7	—	0.3
Maastricht . .	löss.	+ 329.2	— 127.0	981.140.0	1.4	1.5	3.3	15.2	—	5.5
Middelburg. .	argile. . . .	+ 134.1	— 51.7	981.215.3	1.4	1.5	3.3	2.0	—	0.7
Oirschot. . . .	sable	+ 200.7	— 77.4	981.189.6	1.4	1.5	3.3	4.8	—	1.7
Oldenzaal. . .	sable	— 37.9	+ 14.6	981.281.6	1.1	1.2	3.2	14.5	—	5.2
Oss	sable	+ 92.6	— 35.7	981.231.3	1.4	1.5	3.3	2.1	—	0.8
Oud-Beijerland	argile. . . .	+ 52.3	— 20.2	981.246.8	1.4	1.5	3.3	0.2	—	0.1
Sambeek . . .	sable	+ 123.7	— 47.7	981.219.3	1.4	1.5	3.3	4.6	—	1.7
Schoorl	sable	— 117.7	+ 45.4	981.312.4	1.4	1.5	3.3	2.6	—	0.9
Sittard.	löss.	+ 307.2	— 118.5	981.148.5	1.4	1.5	3.3	14.7	—	5.2
Sleen	sable	— 130.9	+ 51.3	981.318.3	2.4	2.4	3.9	5.1	—	1.8
De Steeg . . .	sable	+ 35.0	— 13.5	981.253.5	1.2	1.3	3.3	9.1	—	3.3
Steenwijk . . .	sable	— 170.0	+ 65.6	981.332.6	1.4	1.5	3.3	1.0	—	0.3
Terneuzen . .	argile. . . .	+ 182.9	— 70.5	981.196.5	1.4	1.5	3.3	0.2	—	0.1
Terschelling .	sable	— 282.3	+ 108.9	981.375.9	1.4	1.5	3.3	1.7	—	0.6
Ubagsberg . .	sable pierre calcaire	+ 411.4	— 158.7	981.108.3	1.0	1.1	3.2	59.1	—	21.7
Urk	sable	— 116.6	+ 45.0	981.312.0	1.4	1.5	3.3	0.8	—	0.3
Utrecht	argile. . . .	+ 10.7	— 4.2	981.262.8	2.4	2.4	3.9	1.4	—	0.5
Weert	sable	+ 274.0	— 106.0	981.161.0	1.0	1.1	3.2	10.1	—	3.6

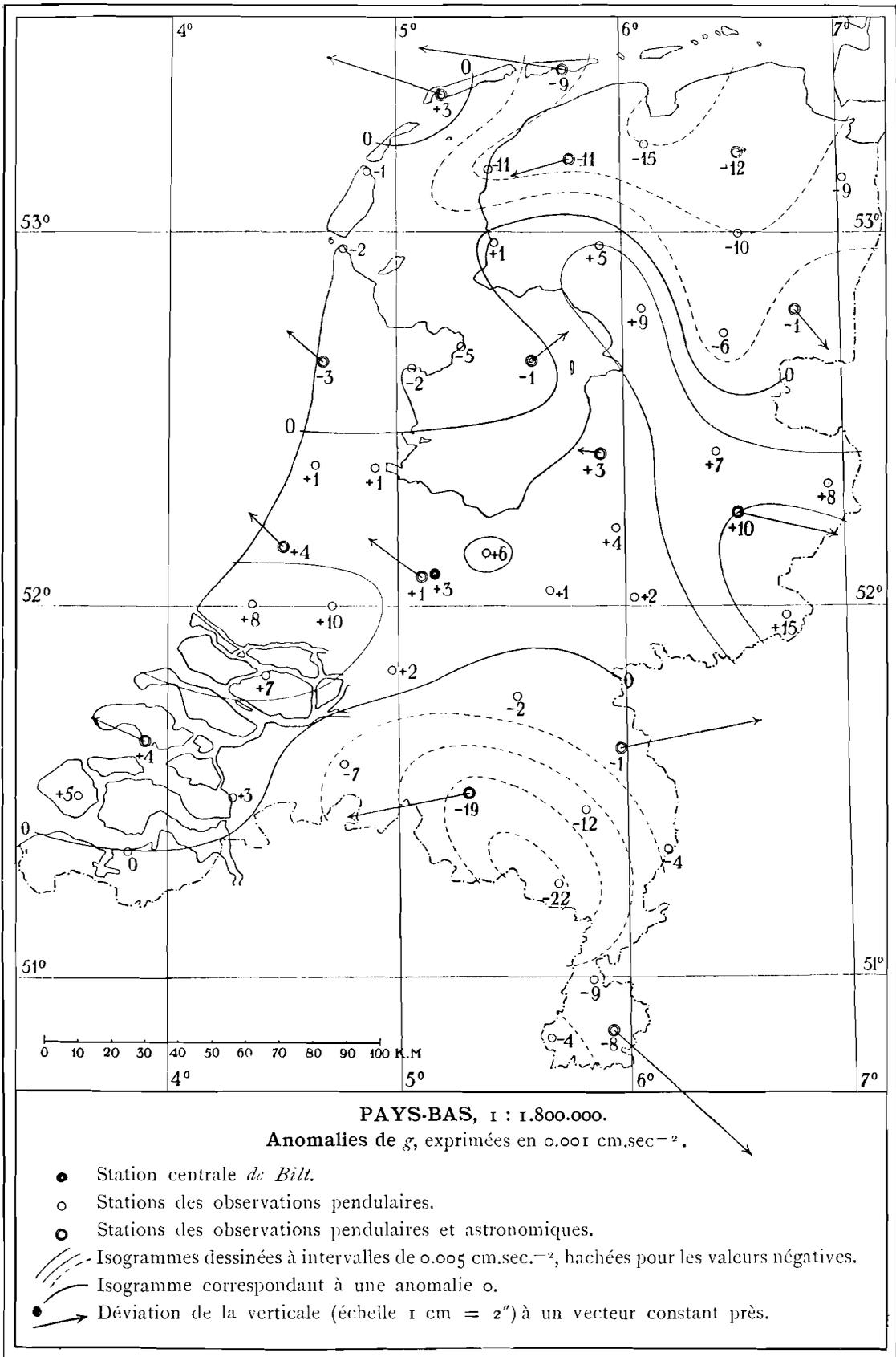
Détermination de g et des anomalies.

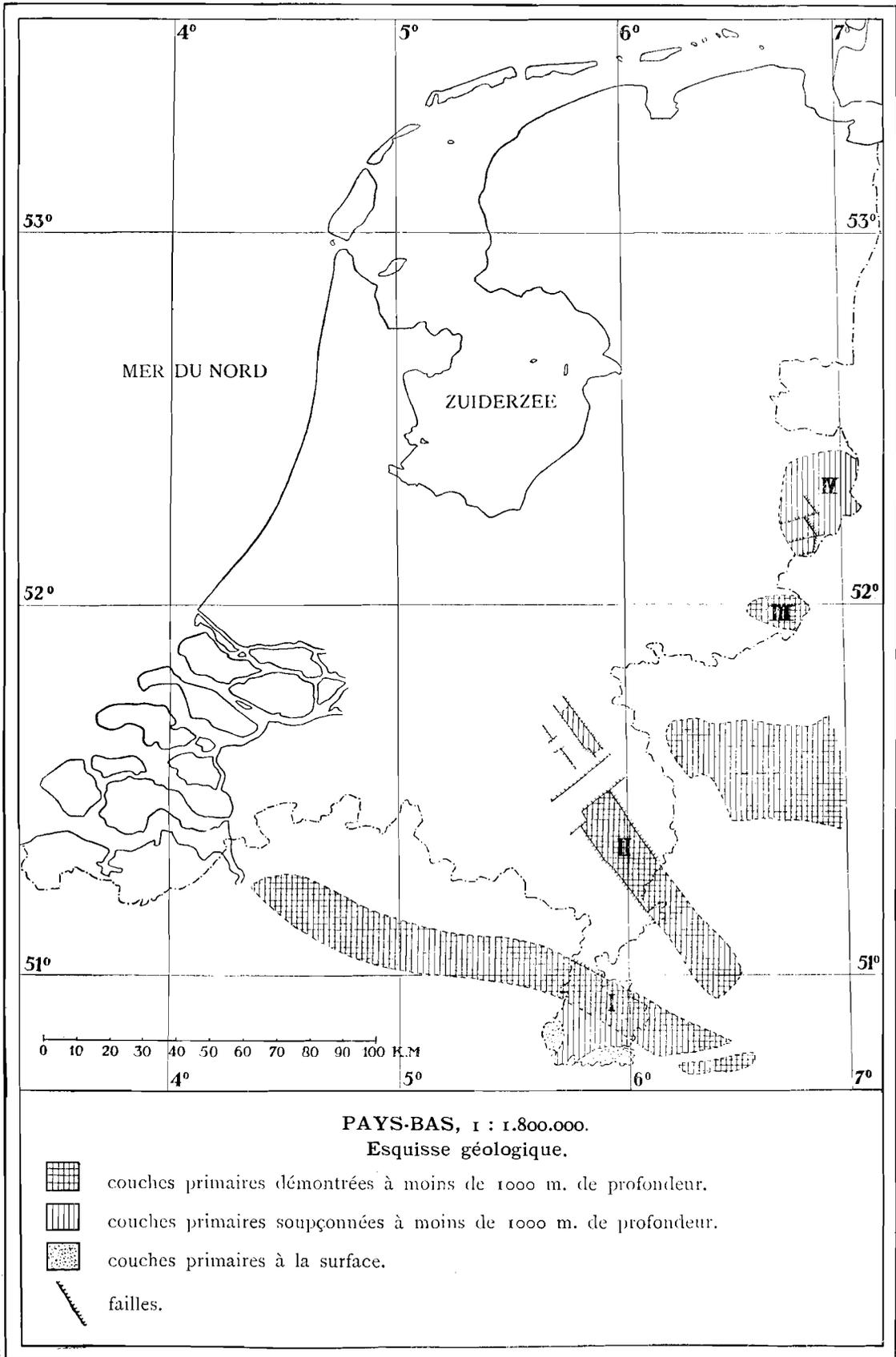
$d g$	g	Erreur moy. de g			$\Delta g'$	$\Delta g''$	$\Delta g'''$	g''	γ_0	$g'' - \gamma_0$
		p. r. à de Bilt	p. r. à Potsdam	valeur absolue						
10^{-3} cm sec ⁻²		10^{-3} cm sec ⁻²				10^{-3} cm sec ⁻²				10^{-3} cm sec ⁻²
	981.267.0	0.5	3.1		0.6	— 0.2	981.267	981.264	+ 3	
+ 104.0	981.371.0	1.2	1.3	3.3	1.2	— 0.4	981.372	981.381	— 9	
+ 6.5	981.273.5	1.1	1.2	3.2	0.6	— 0.2	981.274	981.268	+ 6	
+ 21.3	981.288.3	1.0	1.1	3.2	0.0	0.0	981.288	981.287	+ 1	
+ 8.5	981.275.5	1.4	1.5	3.3	6.0	— 3.0	981.279	981.275	+ 4	
+ 63.0	981.330.0	1.4	1.5	3.3	3.0	— 1.1	981.332	981.342	— 10	
— 55.4	981.211.6	1.4	1.5	3.3	3.2	— 1.2	981.214	981.211	+ 3	
— 73.9	981.193.1	1.4	1.5	3.3	5.6	— 2.0	981.197	981.201	— 4	
— 54.1	981.212.9	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	981.213	981.220	— 7	
+ 82.3	981.349.3	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1	981.350	981.365	— 15	
+ 87.2	981.354.2	1.4	1.5	3.3	0.7	— 0.3	981.355	981.356	— 1	
— 2.9	981.264.1	2.1	2.2	3.7	0.6	— 0.2	981.264	981.256	+ 8	
— 76.4	981.190.6	1.4	1.5	3.3	7.9	— 2.8	981.196	981.208	— 12	
— 14.4	981.252.6	1.4	1.5	3.3	10.4	— 3.7	981.259	981.258	+ 1	
+ 44.3	981.311.3	1.4	1.5	3.3	0.9	— 0.3	981.312	981.317	— 5	
— 25.6	981.241.4	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3	981.242	981.240	+ 2	
— 1.1	981.265.9	1.4	1.5	3.3	0.1	0.0	981.266	981.256	+ 10	
+ 81.5	981.348.5	2.4	2.4	3.9	1.5	— 0.5	981.350	981.362	— 12	
+ 22.1	981.289.1	1.1	1.2	3.2	1.0	— 0.4	981.290	981.289	+ 1	
+ 8.9	981.275.9	2.4	2.4	3.9	14.9	— 5.4	981.286	981.276	+ 10	
+ 78.9	981.345.9	1.2	1.3	3.3	1.4	— 0.5	981.347	981.358	— 11	
+ 77.4	981.344.4	1.4	1.5	3.3	0.0	0.0	981.344	981.339	+ 5	
+ 69.7	981.336.7	1.0	1.1	3.2	1.8	— 0.6	981.338	981.340	— 2	
+ 28.7	981.295.7	1.4	1.5	3.3	3.4	— 1.2	981.298	981.291	+ 7	
+ 43.9	981.310.9	1.4	1.5	3.3	3.3	— 0.8	981.313	981.319	— 6	
+ 42.6	981.309.6	1.4	1.5	3.3	— 0.2	+ 0.1	981.309	981.311	— 2	
+ 81.5	981.348.5	1.2	1.3	3.3	0.7	— 0.3	981.349	981.360	— 11	
+ 6.1	981.273.1	1.0	1.1	3.2	0.7	— 0.3	981.273	981.269	+ 4	
— 127.0	981.140.0	1.4	1.5	3.3	15.2	— 5.5	981.150	981.154	— 4	
— 51.7	981.215.3	1.4	1.5	3.3	2.0	— 0.7	981.217	981.212	+ 5	
— 77.4	981.189.6	1.4	1.5	3.3	4.8	— 1.7	981.193	981.212	— 19	
+ 14.6	981.281.6	1.1	1.2	3.2	14.5	— 5.2	981.291	981.283	+ 8	
— 35.7	981.231.3	1.4	1.5	3.3	2.1	— 0.8	981.233	981.235	— 2	
— 20.2	981.246.8	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	981.247	981.240	+ 7	
— 47.7	981.219.3	1.4	1.5	3.3	4.6	— 1.7	981.222	981.223	— 1	
+ 45.4	981.312.4	1.4	1.5	3.3	2.6	— 0.9	981.314	981.317	— 3	
— 118.5	981.148.5	1.4	1.5	3.3	14.7	— 5.2	981.158	981.167	— 9	
+ 51.3	981.318.3	2.4	2.4	3.9	5.1	— 1.8	981.322	981.323	— 1	
— 13.5	981.253.5	1.2	1.3	3.3	9.1	— 3.3	981.259	981.257	+ 2	
+ 65.6	981.332.6	1.4	1.5	3.3	1.0	— 0.3	981.333	981.324	+ 9	
— 70.5	981.196.5	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	981.197	981.197	0	
+ 108.9	981.375.9	1.4	1.5	3.3	1.7	— 0.6	981.377	981.374	+ 3	
— 158.7	981.108.3	1.0	1.1	3.2	59.1	— 21.7	981.146	981.154	— 8	
+ 45.0	981.312.0	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3	981.312	981.313	— 1	
— 4.2	981.262.8	2.4	2.4	3.9	1.4	— 0.5	981.264	981.263	+ 1	
— 106.0	981.161.0	1.0	1.1	3.2	10.1	— 3.6	981.168	981.190	— 22	

						p. r. à de Bilt	p. r. à Potsdam	valeur absolue		
		10^{-7} sec	10^{-3} cm sec ⁻²		10^{-3} cm sec ⁻²			10^{-3} cm sec ⁻²		
De Bilt	sable mélangé d'humus			981.267.0		0.5	3.1	0.6	— 0.2	
Ameland . . .	sable	— 269.8	+ 104.0	981.371.0	1.2	1.3	3.3	1.2	— 0.4	
Amersfoort . .	sable mélangé d'humus	— 16.9	+ 6.5	981.273.5	1.1	1.2	3.2	0.6	— 0.2	
Amsterdam . .	tourbe	— 55.1	+ 21.3	981.288.3	1.0	1.1	3.2	0.0	0.0	
Apeldoorn . .	sable	— 22.1	+ 8.5	981.275.5	1.4	1.5	3.3	6.0	— 3.0	
Assen	sable	— 163.2	+ 63.0	981.330.0	1.4	1.5	3.3	3.0	— 1.1	
Bergen op Zoom	argile. . . .	+ 143.6	— 55.4	981.211.6	1.4	1.5	3.3	3.2	— 1.2	
Blerick	sable	+ 191.5	— 73.9	981.193.1	1.4	1.5	3.3	5.6	— 2.0	
Breda	sable	+ 140.1	— 54.1	981.212.9	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	
Buitenpost . .	tourbe	— 213.3	+ 82.3	981.349.3	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1	
Cocksdoorp . .	sable	— 226.1	+ 87.2	981.354.2	1.4	1.5	3.3	0.7	— 0.3	
Delft.	tourbe	+ 7.3	— 2.9	981.264.1	2.1	2.2	3.7	0.6	— 0.2	
Deurne	sable	+ 198.2	— 76.4	981.190.6	1.4	1.5	3.3	7.9	— 2.8	
Ede	sable	+ 37.3	— 14.4	981.252.6	1.4	1.5	3.3	10.4	— 3.7	
Enkhuizen . .	argile. . . .	— 114.5	+ 44.3	981.311.3	1.4	1.5	3.3	0.9	— 0.3	
Gorinchem . .	argile. . . .	+ 66.4	— 25.6	981.241.4	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3	
Gouda.	tourbe	+ 2.8	— 1.1	981.265.9	1.4	1.5	3.3	0.1	0.0	
Groningen . .	sable	— 208.0	+ 81.5	981.348.5	2.4	2.4	3.9	1.5	— 0.5	
Haarlem. . . .	tourbe	— 57.2	+ 22.1	981.289.1	1.1	1.2	3.2	1.0	— 0.4	
Harikerberg. .	sable	— 22.7	+ 8.9	981.275.9	2.4	2.4	3.9	14.9	— 5.4	
Harlingen. . .	argile. . . .	— 204.5	+ 78.9	981.345.9	1.2	1.3	3.3	1.4	— 0.5	
Heerenveen. .	tourbe	— 200.7	+ 77.4	981.344.4	1.4	1.5	3.3	0.0	0.0	
Helder	sable	— 180.5	+ 69.7	981.336.7	1.0	1.1	3.2	1.8	— 0.6	
Hollander. . .	sable	— 74.5	+ 28.7	981.295.7	1.4	1.5	3.3	3.4	— 1.2	
Hoogeveen . .	tourbe	— 113.7	+ 43.9	981.310.9	1.4	1.5	3.3	3.3	— 0.8	
Hoorn.	argile. . . .	— 110.4	+ 42.6	981.309.6	1.4	1.5	3.3	— 0.2	+ 0.1	
Leeuwarden. .	argile. . . .	— 211.1	+ 81.5	981.348.5	1.2	1.3	3.3	0.7	— 0.3	
Leiden.	argile. . . .	— 15.8	+ 6.1	981.273.1	1.0	1.1	3.2	0.7	— 0.3	
Maastricht . .	löss.	+ 329.2	— 127.0	981.140.0	1.4	1.5	3.3	15.2	— 5.5	
Middelburg . .	argile. . . .	+ 134.1	— 51.7	981.215.3	1.4	1.5	3.3	2.0	— 0.7	
Oirschot. . . .	sable	+ 200.7	— 77.4	981.189.6	1.4	1.5	3.3	4.8	— 1.7	
Oldenzaal. . .	sable	— 37.9	+ 14.6	981.281.6	1.1	1.2	3.2	14.5	— 5.2	
Oss	sable	+ 92.6	— 35.7	981.231.3	1.4	1.5	3.3	2.1	— 0.8	
Oud-Beijerland	argile. . . .	+ 52.3	— 20.2	981.246.8	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	
Sambeek . . .	sable	+ 123.7	— 47.7	981.219.3	1.4	1.5	3.3	4.6	— 1.7	
Schoorl	sable	— 117.7	+ 45.4	981.312.4	1.4	1.5	3.3	2.6	— 0.9	
Sittard.	löss.	+ 307.2	— 118.5	981.148.5	1.4	1.5	3.3	14.7	— 5.2	
Sleen	sable	— 130.9	+ 51.3	981.318.3	2.4	2.4	3.9	5.1	— 1.8	
De Steeg . . .	sable	+ 35.0	— 13.5	981.253.5	1.2	1.3	3.3	9.1	— 3.3	
Steenwijk . . .	sable	— 170.0	+ 65.6	981.332.6	1.4	1.5	3.3	1.0	— 0.3	
Terneuzen . .	argile. . . .	+ 182.9	— 70.5	981.196.5	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1	
Terschelling .	sable	— 282.3	+ 108.9	981.375.9	1.4	1.5	3.3	1.7	— 0.6	
Ubagsberg . .	sable pierre calcaire	+ 411.4	— 158.7	981.108.3	1.0	1.1	3.2	59.1	— 21.7	
Urk	sable	— 116.6	+ 45.0	981.312.0	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3	
Utrecht	argile. . . .	+ 10.7	— 4.2	981.262.8	2.4	2.4	3.9	1.4	— 0.5	
Weert	sable	+ 274.9	— 106.0	981.161.0	1.0	1.1	3.2	10.1	— 3.6	
Winschoten . .	argile. . . .	— 205.9	+ 79.4	981.346.4	1.4	1.5	3.3	0.1	0.0	
Winterswijk . .	sable	+ 13.0	— 5.0	981.262.0	1.4	1.5	3.3	9.8	— 3.5	
Wolberg. . . .	sable	— 33.7	+ 13.2	981.280.2	2.4	2.4	3.9	18.2	— 6.6	
Workum	argile. . . .	— 193.5	+ 74.6	981.341.6	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1	
Zierikzee . . .	argile. . . .	+ 100.5	— 38.7	981.228.3	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1	

10 ⁻³ cm sec ⁻²	de Bilt			Potsdam			absolute			10 ⁻³ cm sec ⁻²	10 ⁻³ cm sec ⁻²	10 ⁻³ cm sec ⁻²
	981.267.0		0.5	3.1	0.6	— 0.2		981.267	981.264	+ 3		
+ 104.0	981.371.0	1.2	1.3	3.3	1.2	— 0.4		981.372	981.381	— 9		
+ 6.5	981.273.5	1.1	1.2	3.2	0.6	— 0.2		981.274	981.268	+ 6		
+ 21.3	981.288.3	1.0	1.1	3.2	0.0	0.0		981.288	981.287	+ 1		
+ 8.5	981.275.5	1.4	1.5	3.3	6.0	— 3.0		981.279	981.275	+ 4		
+ 63.0	981.330.0	1.4	1.5	3.3	3.0	— 1.1		981.332	981.342	— 10		
— 55.4	981.211.6	1.4	1.5	3.3	3.2	— 1.2		981.214	981.211	+ 3		
— 73.9	981.193.1	1.4	1.5	3.3	5.6	— 2.0		981.197	981.201	— 4		
— 54.1	981.212.9	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1		981.213	981.220	— 7		
+ 82.3	981.349.3	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1		981.350	981.365	— 15		
+ 87.2	981.354.2	1.4	1.5	3.3	0.7	— 0.3		981.355	981.356	— 1		
— 2.9	981.264.1	2.1	2.2	3.7	0.6	— 0.2		981.264	981.256	+ 8		
— 76.4	981.190.6	1.4	1.5	3.3	7.9	— 2.8		981.196	981.208	— 12		
— 14.4	981.252.6	1.4	1.5	3.3	10.4	— 3.7		981.259	981.258	+ 1		
+ 44.3	981.311.3	1.4	1.5	3.3	0.9	— 0.3		981.312	981.317	— 5		
— 25.6	981.241.4	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3		981.242	981.240	+ 2		
— 1.1	981.265.9	1.4	1.5	3.3	0.1	0.0		981.266	981.256	+ 10		
+ 81.5	981.348.5	2.4	2.4	3.9	1.5	— 0.5		981.350	981.362	— 12		
+ 22.1	981.289.1	1.1	1.2	3.2	1.0	— 0.4		981.290	981.289	+ 1		
+ 8.9	981.275.9	2.4	2.4	3.9	14.9	— 5.4	0.2	981.286	981.276	+ 10		
+ 78.9	981.345.9	1.2	1.3	3.3	1.4	— 0.5		981.347	981.358	— 11		
+ 77.4	981.344.4	1.4	1.5	3.3	0.0	0.0		981.344	981.339	+ 5		
+ 69.7	981.336.7	1.0	1.1	3.2	1.8	— 0.6		981.338	981.340	— 2		
+ 28.7	981.295.7	1.4	1.5	3.3	3.4	— 1.2		981.298	981.291	+ 7		
+ 43.9	981.310.9	1.4	1.5	3.3	3.3	— 0.8		981.313	981.319	— 6		
+ 42.6	981.309.6	1.4	1.5	3.3	— 0.2	+ 0.1		981.309	981.311	— 2		
+ 81.5	981.348.5	1.2	1.3	3.3	0.7	— 0.3		981.349	981.360	— 11		
+ 6.1	981.273.1	1.0	1.1	3.2	0.7	— 0.3		981.273	981.269	+ 4		
— 127.0	981.140.0	1.4	1.5	3.3	15.2	— 5.5		981.150	981.154	— 4		
— 51.7	981.215.3	1.4	1.5	3.3	2.0	— 0.7		981.217	981.212	+ 5		
— 77.4	981.189.6	1.4	1.5	3.3	4.8	— 1.7		981.193	981.212	— 19		
+ 14.6	981.281.6	1.1	1.2	3.2	14.5	— 5.2		981.291	981.283	+ 8		
— 35.7	981.231.3	1.4	1.5	3.3	2.1	— 0.8		981.233	981.235	— 2		
— 20.2	981.246.8	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1		981.247	981.240	+ 7		
— 47.7	981.219.3	1.4	1.5	3.3	4.6	— 1.7		981.222	981.223	— 1		
+ 45.4	981.312.4	1.4	1.5	3.3	2.6	— 0.9		981.314	981.317	— 3		
— 118.5	981.148.5	1.4	1.5	3.3	14.7	— 5.2		981.158	981.167	— 9		
+ 51.3	981.318.3	2.4	2.4	3.9	5.1	— 1.8		981.322	981.323	— 1		
— 13.5	981.253.5	1.2	1.3	3.3	9.1	— 3.3		981.259	981.257	+ 2		
+ 65.6	981.332.6	1.4	1.5	3.3	1.0	— 0.3		981.333	981.324	+ 9		
— 70.5	981.196.5	1.4	1.5	3.3	0.2	— 0.1		981.197	981.197	0		
+ 108.9	981.375.9	1.4	1.5	3.3	1.7	— 0.6		981.377	981.374	+ 3		
— 158.7	981.108.3	1.0	1.1	3.2	59.1	— 21.7	0.7	981.146	981.154	— 8		
+ 45.0	981.312.0	1.4	1.5	3.3	0.8	— 0.3		981.312	981.313	— 1		
— 4.2	981.262.8	2.4	2.4	3.9	1.4	— 0.5		981.264	981.263	+ 1		
— 106.0	981.161.0	1.0	1.1	3.2	10.1	— 3.6		981.168	981.190	— 22		
+ 79.4	981.346.4	1.4	1.5	3.3	0.1	0.0		981.346	981.355	— 9		
— 5.0	981.262.0	1.4	1.5	3.3	9.8	— 3.5		981.268	981.253	+ 15		
+ 13.2	981.280.2	2.4	2.4	3.9	18.2	— 6.6	0.3	981.292	981.289	+ 3		
+ 74.6	981.341.6	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1		981.342	981.341	+ 1		
— 38.7	981.228.3	1.4	1.5	3.3	0.4	— 0.1		981.229	981.225	+ 4		







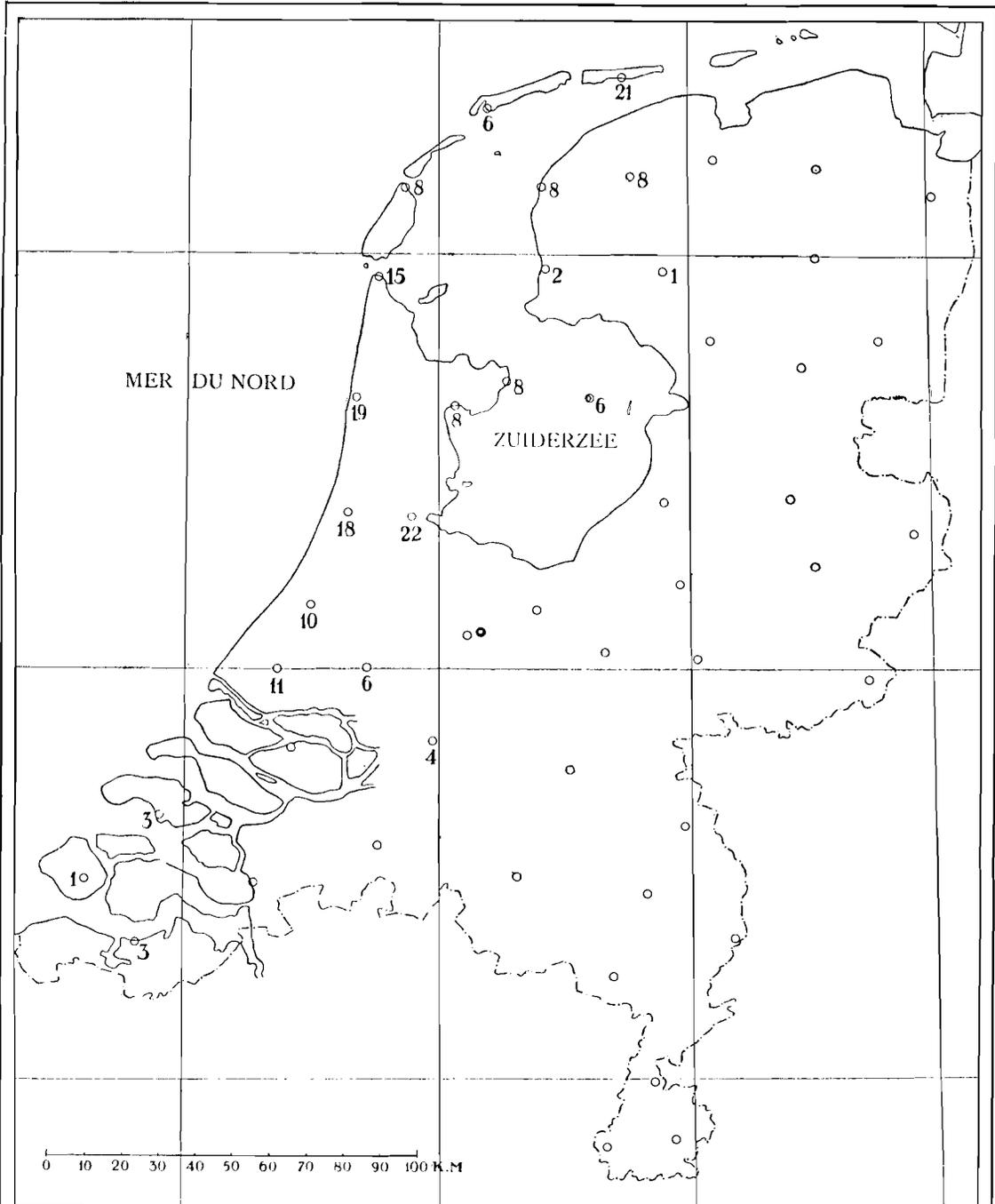


PAYS-BAS, 1 : 1.800.000.

Mouvements du sol.

Les chiffres donnent la valeur moyenne de $G =$ le module de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t y'' e^{-\lambda s} ds$
 où y'' est l'accélération horizontale en microns-sec.⁻². y'' est donc de la même ordre de
 grandeur que les chiffres donnés.

Pour les stations sans chiffre la valeur moyenne de G est négligeable.



PAYS-BAS, 1 : 1.800.000.

Mouvements du sol.

Les chiffres donnent la valeur moyenne de $G =$ le module de $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t y'' e^{-int} dt$
 où y'' est l'accélération horizontale en microns-sec.⁻², y'' est donc de la même ordre de
 grandeur que les chiffres donnés.

Pour les stations sans chiffre la valeur moyenne de G est négligeable.